

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PARIS - EST CRÉTEIL**

Spécialité

Informatique

L'École Doctorale Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la
Communication (MSTIC)

Présentée par

Amira KOUZANA

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS - EST CRÉTEIL

Sujet de la thèse :

**Conception d'un Cadre d'Optimisation de
Fonctions d'Energies. Applications au Traitement
d'Images.**

devant le jury composé de :

Pr. Abdelmalik TALEB-AHMED	Rapporteur	LAMIH, Université Polytechnique Hauts-De-France
Dr. Youssef CHAHIR (HDR)	Rapporteur	GREYC, Université de Caen Lower-Normandy
Pr. Hugues TALBOT	Examineur	CentraleSupélec, Center for Visual Computing
Dr. Larbi BOUBCHIR	Examineur	LIASD, Université de Paris 8
Dr. Frederic HELIODORE	Examineur	General Electric, Paris
Dr. Narjes DOGGAZ	Examineur	Lipah, Université de Tunis El Manar
Dr. Amir NAKIB (HDR)	Directeur de thèse	LISSI, Université Paris 12
Pr. Khaled BSAÏES	Directeur de thèse	Lipah, Université de Tunis El Manar

Abstract

The energy minimisation function is a powerful tool for image processing. Indeed, the convex ones are well revisited, since the convexity property allows an easier handling of this type of functions. For non-convex energy functions, their optimization is more tedious and delicate. Despite, the minimization of this type of functions presents more interesting results, especially in image processing. But, this type of functions is not well explored. The existing methods for energy minimization functions are varied. We can find some methods that are designed for specific functions and their properties. But, there is no generalised approach able to handle several energy function types. To do this, we look at two cases : discrete and continuous functions.

A new unified approach to deal the convex energy functions is proposed without considering their specific properties. The first case consists in formulating the problem as a discrete non-cooperative strategic exact potential game, and the cost optimization process is interpreted as the search of a Nash Equilibrium. The problem is expressed as a combinatorial, for which a Branch and Bound algorithm is proposed to solve it. Then, we illustrate the performance of the proposed approach on image segmentation. The used convex energy framework is the Power Watershed model.

In the second case, an other approach for non convex energy functions is generated. It consists in formulating the problem as a continuous non-cooperative strategic exact potential game. The continuous Nash equilibrium search is an interval division-based process. To ensure the equilibrium stability, a strict conditions are used for the interval selection. Then, we illustrate the performance of the proposed approach using non convex energy functions on image segmentation. The used functions are Mumford - Shah model, ℓ_1/ℓ_2 norm, Geman & McClure function and Baum - Welch function.

The new proposed approaches are extended for image filtering as an anisotropic diffusion process on medical images.

Keywords : optimization, energy function, game theory, Nash equilibrium, segmentation, image filtering, anisotropic diffusion, interval division, branch and bound.

Résumé

La minimisation des fonctions d'énergies trouve un grand succès en traitement d'images. En effet, les fonctions d'énergies convexes ont été largement exploitées dans plusieurs travaux de recherche car le critère de convexité permet une manipulation spécifique. A contrario, les fonctions d'énergies non convexes, dont la manipulation est plus complexe, ont été moins exploitées. Ces fonctions, une fois optimisées, permettent d'avoir des résultats intéressants, notamment en traitement d'images. Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes d'optimisation des fonctions d'énergies. La plupart de ces méthodes ont été conçues pour des fonctions bien spécifiques s'adaptent aux propriétés de celles-ci. Cependant, il n'existe pas une approche généralisée pouvant traiter plusieurs formes de fonctions d'énergies.

Dans le cadre de cette thèse, nos travaux ont porté sur la proposition d'une nouvelle approche pour optimiser les fonctions d'énergies indépendamment de leurs propriétés de convexité. Pour ce faire, nous avons considéré deux cas : le cas des fonctions discrètes et celui des fonctions continues. Dans le premier cas, nous avons reformulé le problème sous la forme d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts. Ensuite, le processus d'optimisation de la fonction de coût, qui peut être interprété comme la recherche de l'équilibre de Nash, est réalisé via un algorithme de Séparation et Évaluation (branch and bound).

Dans le second cas, le problème a été reformulé sous la forme d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts et continus. Pour résoudre le problème d'optimisation ainsi défini, un algorithme d'optimisation basé sur l'approche "diviser pour régner" a été proposé et sa convergence a été également démontrée sous certaines conditions.

L'approche proposée a été appliquée pour résoudre des problèmes de segmentation d'images issues de la littérature : le modèle de Mumford-Shah, la norme ℓ_1/ℓ_2 , la fonction de Geman & McClure et la fonction de Baum-Welch.

Afin de montrer que cette approche peut être appliquée à d'autres problèmes de traitement d'images par minimisation d'énergie, nous l'avons appliqué au filtrage d'images médicales par diffusion anisotrope.

Mots Clefs : optimisation, fonction d'énergie, théorie des jeux, équilibre de Nash,

segmentation, filtration, diffusion anisotrope, division d'intervalle, séparation et évaluation.

Table des matières

Introduction Générale	7
1 État de l'Art de l'Optimisation des Fonctions d'Énergies en Traitement d'Images	11
1.1 Introduction	12
1.2 Formes de Fonctions d'Énergies	12
1.2.1 Discrétisation de l'Espace de Recherche via les Graphes	12
1.2.2 Fonctions d'Énergies	13
1.2.3 Méthodes de Régularisation	14
1.3 Segmentation d'Image par Minimisation d'Énergies	15
1.4 Théorie des Jeux et Problèmes d'Optimisation	16
1.5 Optimisation par Séparation - et - Evaluation	17
1.6 Conclusion	20
2 Développement d'un Cadre Général Discret basé sur la Théorie de Jeux et l'Optimisation par Séparation - et - Evaluation	21
2.1 Introduction	22
2.2 Jeu Stratégique Non Coopératif à Potentiels Exactes et Équilibre de Nash	22
2.2.1 Jeux de Forme Stratégique	23
2.2.2 Équilibre de Nash	24
2.2.3 Jeu Potentiel	26
2.2.3.1 Classes de Jeux Potentiels	26
2.2.3.2 Propriétés des Jeux Potentiels	27
2.2.3.3 Existence de l'Équilibre de Nash	28
2.2.3.4 Convergence vers l'Équilibre de Nash	29
2.3 Les Méthodes de Segmentation d'Images basées sur la Théorie des Jeux	30
2.4 Formulation du Problème de Minimisation de Fonctions d'Énergies Convexes en Jeu Stratégique Non-coopératif à Potentiels Exactes Discrets	33
2.5 Séparation-et-Évaluation pour Trouver l'Équilibre de Nash	37

2.6	Conclusion	40
3	Application du Cadre TES à la Segmentation d'Images	41
3.1	Introduction	42
3.2	Reformulation des Modèles de Fonctions d'Énergies Convexes	42
3.2.1	Les Fonctions d'Énergies Convexes LPEP	42
3.2.2	LPEP comme Jeu Stratégique non Coopératif à Potentiels Exacts Discrets	43
3.3	Illustration de l'Approche Proposée	44
3.4	Segmentation d'Image avec Marqueurs par Minimisation de LPEP	46
3.5	Conclusion	48
4	Développement d'un Cadre Général basé sur l'Optimisation Continue par Intervalle et Théorie des Jeux	53
4.1	Introduction	54
4.2	Division d'Intervalles pour Minimisation des Fonctions Monotones	54
4.2.1	Distance et Topologie	55
4.2.2	Convergence et Continuité sur des Intervalles	56
4.2.3	Critère d'Arrêt	57
4.2.4	Monotonie des Fonctions sur \mathbb{IR}	57
4.3	Recherche d'EN Continu	58
4.4	Stabilité et Convergence	60
4.5	Conclusion	61
5	Application du Cadre OCIT à la Segmentation d'Images	63
5.1	Introduction	64
5.2	Reformulation et Minimisation des Modèles de Fonctions d'Énergies Non-Convexes	64
5.2.1	Généralisation et Reformulation du Modèle Mumford - Shah Dynamique et Statique	65
5.2.2	Exploitation de Fonctions d'Énergies Non-Convexes par Théorie des Jeux Continus	66
5.3	Segmentation d'Image avec Marqueurs par Minimisation de Fonctions d'Énergie Monotones	67
5.4	Conclusion	70

6 Extension du Cadre basé sur la Théorie du Jeu pour le Filtrage d'Images par Diffusion Anisotrope	78
6.1 Introduction	79
6.2 Principe de Diffusion Anisotrope pour Filtrage d'Images	79
6.3 Formulation comme Jeu Stratégique non Coopératif à Potentiels Exactes	
Continus	80
6.4 Résultats et Discussion	81
6.5 Conclusion	83
Conclusions et Perspectives	88
Annexe	90
Bibliographie	93

Introduction Générale

Le problème classique de traitement d'image par minimisation de fonction d'énergie Φ consiste à trouver une estimation $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ d'une image représentée par $x \in \mathbb{R}^n$.

Il existe plusieurs formes de fonctions d'énergies en traitement d'images et leur optimisation dépend essentiellement de leurs natures : discrète ou continue. Par conséquent, deux approches sont considérées lors de la conception d'une méthode d'optimisation d'une fonction d'énergie. La première approche est celle réservée aux fonctions d'énergies continues, tandis que la seconde est dans le cas où les fonctions d'énergies sont discrètes.

Dans le premier cas, si la fonction d'énergie est différentiable les méthodes basées sur la descente de gradient sont recommandées. Si la fonction d'énergie n'est pas différentiable des méthodes d'approximation du gradient ou des heuristiques sont utilisées pour optimiser la fonction d'énergie. Cependant, la convergence vers l'optimum global n'est pas garantie.

Dans le second cas où la fonction d'énergie est discrète (les variables de décision de la fonction d'énergie sont discrètes) les méthodes de programmation en nombre entiers ou les méthodes d'optimisation combinatoire sont recommandées. L'inconvénient de ces méthodes est leurs complexités et la difficulté de leurs parallélisations.

Comme suscité, tous les problèmes en traitement d'images (segmentation, filtrage, recalage, tracking, ...) peuvent être formulés sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonction d'énergie. Dans la littérature, pour chaque fonction d'énergie, de nombreux travaux de recherche proposent une variété d'approches d'optimisation : soit développer une approche spécialement pour optimiser l'énergie considérée, soit apporter des modifications aux algorithmes classiques pour l'optimiser. Par conséquent, il est rare de trouver une méthode pouvant traiter une variété de fonctions d'énergies. En d'autres termes, il n'existe pas une approche d'optimisation qui unifie l'optimisation ces problèmes, indépendamment de la fonction d'énergie. De plus, certaines fonctions d'énergie nécessitent des méthodes hybrides car elles ont une partie des variables qui est continue et l'autre discrète.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous proposons une unification des ap-

proches de traitement d'images par optimisation de fonctions d'énergies. Nous avons commencé par les méthodes de segmentation d'images, avec une reformulation des différentes formes via la théorie des jeux. Ceci nous a permis de regrouper un ensemble de modèles et d'avoir des fonctions continues et monotones. La théorie des jeux a permis de simplifier ce problème combinatoire et de grande taille (dimension du problème = la taille de l'image).

Dans la nouvelle formulation proposée l'équilibre de Nash est considéré comme le minimum d'une fonction d'énergie à plusieurs variables. Cet équilibre de Nash représente l'état stable du jeu stratégique où chaque joueur a un avis précis sur le comportement des autres joueurs, ensuite il y réagit rationnellement. Cet équilibre est un profil de stratégies du jeu, un par joueur, tel que chaque joueur minimise son coût, en fonction des activités des autres joueurs. En d'autres termes, l'équilibre de Nash représente le point de fonctionnement optimal du jeu. L'avantage de l'usage de ce concept est de transformer le problème non-séparable en un problème séparable où au lieu de calculer à chaque itération la fonction d'énergie en faisant appel à toutes les variables du problème, on peut restreindre le calcul aux seules variables participant à la variation de la fonction de coût du joueur, qui est en train de jouer. Par conséquent, les algorithmes de type glouton ou gourmand peuvent être utilisés pour optimiser la fonction de coût.

Le problème ainsi défini est combinatoire et sa solution peut être obtenue via l'adaptation de la méthode de Séparation - et - Evaluation. Cet algorithme a été conçu à la base pour traiter des problèmes d'optimisation discrets combinatoires. Cette méthode d'énumération est essentiellement utilisée pour résoudre les problèmes non linéaires et NP-complet. Dans le cas d'une fonction d'énergie convexe, ce type de fonctions garantit l'existence d'un optimum global unique, ce qui permet d'avoir un point unique d'équilibre de Nash. Cette unicité est garantie si le jeu utilisé pour modéliser le problème est à « potentiels exacts ».

Dans le cas des fonctions d'énergies non-convexes, nous modélisons les fonctions d'énergies non convexes sous la forme d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts continus. Les stratégies des joueurs seront sous la forme d'intervalles formant un espace métrique. Afin d'optimisation le modèle ainsi formulé, un algorithme d'optimisation basé sur la division d'intervalles est utilisé pour le résoudre.

Cette thèse a été préparée au Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI, EA 3956) de l'Université Paris-Est Créteil (UPEC), au sein du groupe SIMO (Signal, Image et Optimisation) et le Laboratoire en Informatique en Programmation Algorithmique et Heuristique (LIPAH) de l'université de Tunis el Manar (Tunisie). Elle

a été co-dirigée par Dr Amir Nakib, maître de conférences HDR, et Pr Khaled Bsaïes, professeur des Universités à l'université de Tunis.

Le manuscrit de thèse s'articule autour de 6 chapitres : Dans le premier chapitre, nous introduisons les formes de fonctions d'énergies utilisées en segmentation d'image ainsi que les travaux de segmentation d'image par minimisation d'énergie. Une présentation des relations entre la théorie des jeux et les problèmes d'optimisation est abordée. Nous terminons ce chapitre par la présentation des algorithmes de Séparation - et - Évaluation.

Dans le second chapitre, nous définissons quelques notions de la théorie des jeux qui seront nécessaires. De plus, quelques travaux de traitement d'image réalisés en utilisant la théorie des jeux seront discutés. Ensuite, nous reformulons le problème de minimisation d'énergie convexe en le présentant comme un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets. De plus, un algorithme d'optimisation propre à ce type de problème discret convexe est présenté.

Dans le troisième chapitre, une application de l'approche proposée est réalisée sur le cadre d'énergie de ligne de partage des eaux puissance (LPEP), afin de l'étendre en pratique. Ce modèle n'a pas été exploité pour les cas (q fini et $p \rightarrow \infty$) et ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$). Une illustration des résultats et une comparaison qualitative et quantitative sont présentées par rapport à d'autres modèles de la même famille que le LPEP.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les modèles de fonctions d'énergies non-convexes par un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts mais continus. Ensuite, l'algorithme basé sur l'approche de division des intervalles développé pour résoudre le problème ainsi formulé est exposé. L'étude des conditions de convergence est présentée également pour clôturer le chapitre.

Dans le cinquième chapitre, nous exposons l'application de l'approche proposée dans le chapitre 4 pour la segmentation d'images. En premier lieu, nous exploitons le modèle de Mumford-Shah. Ce modèle est reformulé en généralisant sa fonction pour l'adapter à la minimisation, il est exploité de deux façons ; une statique et une dynamique pour la segmentation d'image. De plus, nous testons cette approche sur d'autres modèles de fonctions d'énergies non-convexes, dans le but de valider l'approche sur une variété de fonctions non-convexes. Nous terminons ce chapitre avec quelques résultats de segmentation par minimisation des différents modèles de fonctions et une étude quantitative et qualitative.

Dans le sixième chapitre, nous étendons ces méthodes pour le filtrage d'image par

diffusion anisotrope, afin de généraliser les approches proposées pour le domaine de traitement d'image, autre que la segmentation.

État de l'Art de l'Optimisation des Fonctions d'Énergies en Traitement d'Images

1.1	Introduction	12
1.2	Formes de Fonctions d'Énergies	12
1.3	Segmentation d'Image par Minimisation d'Énergies	15
1.4	Théorie des Jeux et Problèmes d'Optimisation	16
1.5	Optimisation par Séparation - et - Evaluation	17
1.6	Conclusion	20

1.1 Introduction

De plus en plus de domaines font appel à l'optimisation des fonctions d'énergies, qui est classé dans la catégorie des problèmes combinatoires. D'habitude, les fonctions d'énergies sont difficiles à optimiser, surtout si la forme de cette fonction est non-convexe, ce qui est le cas d'une grande variété des cas. En traitement d'image, ce problème est soulevé sur un espace avec des milliers, même des millions de variables. Par conséquent, atteindre l'optimum est bien gourmand en terme de mémoire et de temps d'exécution, malgré l'évolution continue des machines, de point de vue rapidité et taille mémoire, et du nombre d'algorithmes proposés.

Au cours de ce premier chapitre, nous allons introduire les formes de fonctions d'énergies utilisées en segmentation d'image. Ensuite, nous allons donner des brefs aperçus de quelques travaux de segmentation d'image par minimisation d'énergie. Une brève présentation des relations entre la théorie des jeux et les problèmes d'optimisation sera évoquée. Et finalement, nous allons élaborer un résumé sur les algorithmes de Séparation - et - Evaluation, ainsi que leurs règles et leurs évolutions.

1.2 Formes de Fonctions d'Énergies

Dans ce paragraphe, nous introduisons des notations de graphes qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. Puis, nous allons présenter la forme générale des fonctions d'énergies sur les graphes.

1.2.1 Discrétisation de l'Espace de Recherche via les Graphes

Les calculs discrets [1] sont utilisés pour reformuler les problèmes continus sur un graphe. Le but des calculs discrets est de trouver des ensembles de définitions ou des opérateurs différentiels, à des problèmes continus, dans le but de rendre les calculs sur des machines possibles sans se référer aux problèmes continus initiaux.

La première étape de discrétisation consiste à présenter les variables sur des graphes. Un graphe est défini comme étant une paire $G = (V, E)$, avec les nœuds $v_i \in V$ qui correspondent aux pixels de l'image, et les arcs ou arêtes $e_{ij} \in E \subseteq V \times V$, avec $n = |V|$ le nombre de nœuds du graphe G et $m = |E|$ est le nombre de ses arêtes. Une arête $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ connecte deux voisins v_i et v_j , et qui a un poids positif réel $w_{ij} = w(v_i, v_j) \in \mathbb{R}_+^*$ mesurant le degré de connectivité entre les deux nœuds. Une valeur élevée de w_{ij} signifie une forte connectivité entre les nœuds connectés et

inversement pour les valeurs faibles. Le vecteur $w \in \mathbb{R}^m$ contient les valeurs de w_{ij} de chaque arête $e_{ij} \in E$ de G . De plus, à chaque nœud v_i , nous pouvons attribuer un poids noté par $g_i \in \mathbb{R}_+^*$ et g le vecteur de \mathbb{R}^n contenant les poids g_i pour chaque nœud $v_i \in V$ de G . Notons aussi que chaque nœud $v_i \in V$ inclut un ou plusieurs potentiels $x_i \in [0,1]^l$ avec $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il})$ indiquant le degré d'appartenance du nœud v_i à l'objet $h \in L$. Tout au long de ce manuscrit, l'indice $h \in L$ symbolise, à la fois le label placé sur l'objet à extraire par la segmentation, que l'objet lui-même, avec $l = |L|$ le nombre total de label ou d'objet à extraire de l'image. Le vecteur x de $\mathbb{R}^{n \times l}$ contient tout x_{ih} pour chaque nœud v_i et chaque objet h .

1.2.2 Fonctions d'Énergies

La qualité du résultat dépend de la définition de l'énergie, de la sélection de l'ensemble des labels L et de l'image Γ elle-même. Du point de vue de la théorie d'approximation, le problème de segmentation et du filtrage d'images consiste à trouver une façon pour calculer une approximation de l'optimum de la fonction d'énergie Φ modélisant les variations de l'image. Pour associer chaque unité (pixel ou voxel) de l'image Γ à l'objet approprié h , une fonction d'énergie Φ doit être optimisée.

$$\text{trouver } \hat{x} \text{ tel que } \hat{x} = \min_{x \in X} \Phi(x) \quad (1.1)$$

$$\Phi(x) = [\phi_{\text{régularisation}}(x) + \beta \phi_{\text{fidélité-données}}(x)] \quad (1.2)$$

$$\Phi(x) = \sum_{h \in L} [\phi_{\text{régularisation}}(x_h) + \beta \phi_{\text{fidélité-données}}(x_h)] \quad (1.3)$$

avec $\phi_{\text{régularisation}}$ mesure le degré de non régularité avec le label ou la contrainte h donnant des informations a priori sur Γ , tandis que $\phi_{\text{fidélité-données}}$ mesure la divergence entre l'objet ou la contrainte h et les données observées, et finalement $\beta > 0$ est un paramètre qui contrôle le compromis entre $\phi_{\text{régularisation}}$ et $\phi_{\text{fidélité-données}}$.

Le terme $\phi_{\text{fidélité-données}}$ assure que \hat{x} satisfait l'Equation 1.1 assez fidèlement selon une mesure appropriée. Le bruit br est aléatoire et pour dériver $\phi_{\text{fidélité-données}}$ d'une manière naturelle de l'Equation 1.1, il faut utiliser les probabilités [2, 3, 4, 5]. Plus précisément, si $P(x, \Gamma)$ est la vraisemblance de la donnée Γ , le choix habituel est présenté par l'équation suivante (Equation 1.4).

$$\phi_{\text{fidélité-données}}(x) = -\log P(x) \quad (1.4)$$

Si f est un opérateur linéaire $x = f(\Gamma) + br$, sur l'image Γ , renvoie une matrice carrée de taille $(n \times n)$ connue sous le nom de matrice d'adjacence, qui est une matrice inversible.

br est un bruit blanc Gaussien qui résulte la relation suivante (Equation 1.5).

$$\phi_{\text{fidélité-données}}(x) \propto \|f(\Gamma) - x\|_{\ell} \quad (1.5)$$

avec $f(\Gamma)$ représente les intensités de l'image Γ , ℓ soit la norme ℓ_0 , ℓ_1 ou ℓ_2 .

1.2.3 Méthodes de Régularisation

En traitement de l'image, le terme de régularisation est bien important. En effet, pour les problèmes de filtrage d'images, les variations des intensités sont limitées. Ces variations des intensités sont les différences locales des intensités par rapport à un voisinage. Pour les problèmes de segmentation d'images par minimisation d'énergie, la somme des variations entre les labels du voisinage est pénalisée. En stéréovision variationnelle, l'estimation de la profondeur d'un plan suppose aussi une cohérence locale. Cette dernière est limitée par la somme des variations dans le but d'obtenir une estimation par lissage par morceaux. Le rôle de $\phi_{\text{régularisation}}$ dans l'Equation 1.3 est de pousser la solution à exploiter quelques composantes a priori connues. Cette fonction est un terme de régularisation. En traitement de l'images, $\phi_{\text{régularisation}}$ prend la forme suivante (Equation 1.6).

$$\phi_{\text{régularisation}}(x) = \int_{\Gamma} \phi(\|\nabla(x(z))\|) dz \quad (1.6)$$

$$\phi_{\text{régularisation}}(x) = \sum_{i=1}^n \phi(\|\nabla_i(x)\|) \quad (1.7)$$

où $\forall i \in 1, \dots, n$, ∇_i modélise la variation d'intensité et $\|\cdot\|$ est généralement la norme ℓ_1 ou ℓ_2 . La question qui se pose est "comment est traduite la norme du gradient de x numériquement?". La famille des $\nabla_i, \forall i$ représente une approximation discrète du gradient, un opérateur Laplacien sur x , une différence finie de diverses commandes, la combinaison de ces derniers avec un opérateur de synthèse d'une transformation de l'image ou des vecteurs de base canonique de \mathbb{R}^n . Si $\forall i, \nabla_i : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ est une différence finie ou un Laplacien discret, l'égalité de l'Equation 1.8 est vraie.

$$\phi(\|\nabla_i(x)\|) = \phi(|\nabla_i(x)|) \quad (1.8)$$

Si ∇_i est un vecteur base de \mathbb{R}_n , $\phi(\|\nabla_i(x)\|) = \phi(|x_i|)$. A partir de l'Equation 1.7, $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction générale, souvent appelée fonction potentielle (FP). Plus de détails sur les fonctions de régularisation seront fournies dans les chapitres 2 et 3.

1.3 Segmentation d'Image par Minimisation d'Énergies

Plusieurs méthodes de segmentation d'image basées sur la minimisation d'énergie sur des graphes sont déjà présentes.

La transformation par ligne de partage des eaux (LPE) [6, 7, 8, 9, 10, 11] a pour principe de trouver les lignes de l'écoulement des eaux sur des surfaces en cherchant les minimums des gradients de l'image. Cet ensemble de gradients est considéré comme une carte de reliefs. Les marqueurs sont placés par l'utilisateur ou trouvés automatiquement afin de spécifier les régions d'intérêt à segmenter. D'un point de vue optimisation, ces marqueurs sont des contraintes du problème.

Les algorithmes de recherche de traversée maximale des forêts (MSF) de Kruskal [12] et de Prim [13] appartiennent à la même famille que LPE. Dans ces modèles, chaque arbre est exactement connecté à une composante marqueur, et le poids de l'ensemble des arbres est maximisé. Si les marqueurs correspondent aux maximums, la segmentation obtenue par MSF est bien celle du LPE [7].

Nous citons aussi les méthodes basées sur le Graph Cut (GC), introduites par Boykov et Jolly [14]. La segmentation produite par le GC est déterminée par la recherche de la coupe minimale entre les marqueurs du fond et de la forme via le calcul du flux maximum [15] ou variation totale [16]. Les marqueurs sont considérés comme étant des contraintes dures de point de vue optimisation. Le théorème du flux maximum - coupe minimale est un théorème d'optimisation dans un réseau.

Le marcheur aléatoire (MA), présenté dans [17], peut être interprété comme une affectation des pixels, non marqués, aux marqueurs là où il y a une distance de diffusion. Le modèle de MA classique est défini sur un graphe, mais dans [18] il est étendu en utilisant des hypergraphes orientés dans le but de calculer la matrice de transition. Dans le cas du chemin le plus court [19, 20, 21, 22] introduit par Bai et Sapiro, chaque pixel est affecté au marqueur de fond si le plus court chemin est depuis le pixel courant vers le marqueur de fond.

Le modèle de ligne de partage des eaux puissance (LPEP) [23] propose un framework commun [24] qui inclut les algorithmes de GC, MA et MSF. Il considère que tous ces modèles appartiennent à la même catégorie de segmentation d'image par minimisation de fonctions d'énergies. Ce modèle sera détaillé plus dans le chapitre 3.

De plus, nous pouvons citer plusieurs modèles simplifiés du modèle original Mumford-Shah [25]. Il y a des formulations continues [26, 27] et des formulations discrètes [28, 29, 30] modélisant ce problème. L'optimisation de ces fonctions d'énergies a été

réalisé à l'origine par des calculs de courbes déformables [31] ou par évaluation de Level Set via le schéma du gradient descendant [26]. Il existe des modèles plus récents d'optimisation avec une garantie de convergence vers l'optimum [32].

Il existe d'autres modèles moins connus que les précédents, comme la norme ℓ_1/ℓ_2 [33], la fonction de Geman & McClure [34] et la fonction de Baum - Welch [?]. Vu la difficulté d'exploiter les fonctions associées à ces modèles, leur optimisation est une tâche délicate. Ces fonctions de régularisation sont non-convexes mais monotones [35]. Cependant, elles donnent des résultats meilleurs que ceux donnés par des fonctions convexes [35], même si les minimums atteints sont locaux. Ces derniers sont obtenus en cherchant les endroits où s'annule la dérivée de la fonction d'énergie à minimiser.

1.4 Théorie des Jeux et Problèmes d'Optimisation

La théorie des jeux a été proposée par Von Neumann et Morgenstren [36]. Elle a été développée par Nash [37, 38] pour le domaine de l'économie. La théorie de jeux classique agit avec des joueurs individuels qui doivent décider entre différentes stratégies dans le but de minimiser leurs taux de paiements. L'optimisation multi variables et la théorie des jeux sont deux domaines chevauchant. La modélisation des problèmes d'optimisation comme un jeu n'est pas facile, car on doit créer une connexion entre les algorithmes de la théorie des jeux, comme un concepteur de joueurs. De plus, on doit trouver les contradictions entre les joueurs et incorporer les fonctions de paiements ou de coûts. En informatique, l'étude mathématique de la théorie des jeux est un problème difficile, particulièrement concernant la recherche de l'Équilibre de Nash efficacement et rapidement. Comme pour les jeux réels, un jeu est connu essentiellement comme un ensemble de règles et de conventions à respecter pour jouer. Un joueur fait un coup en choisissant dans un ensemble de choix appelé ensemble de stratégies. Les jeux modélisés peuvent être classés en fonction du nombre et des comportements des joueurs. Pour évaluer la performance de chaque joueur, une fonction de coût ou de paiement est associée à chacun d'eux. Elle est basée sur la décision du joueur et de celles de ses co-joueurs. Ainsi, chaque joueur prend des décisions rationnelles en maximisant ses paiements et/ou minimisant ses fonctions de coûts. En plus des objectifs qui sont propres à chaque joueurs, il y a des contraintes qui lui sont imposées, par les autres joueurs. Ces contraintes affectent ses choix en stratégies. Un jeu doit être soit à somme nulle, soit à somme non nulle. Pour celui à somme nulle, le gain d'un joueur est nécessairement la perte d'un ou plusieurs autres joueurs, qui n'est pas le cas des jeux à

somme non nulle. Les jeux peuvent être aussi classés comme des jeux non coopératifs ou coopératifs. Pour un jeu coopératif, chaque coopération ou accord entre les joueurs est permis. Par contre, pour les jeux non coopératifs, chaque échange latéral entre les joueurs est interdit. Les jeux non coopératifs simples supposent que les joueurs possèdent des informations complètes. En d'autres termes, tous les joueurs connaissent les stratégies et les paiements des autres. Chaque joueur rationnel sélectionnera une stratégie minimisant ses propres paiements. Ce dernier dépend des stratégies sélectionnées des autres, aussi. Cela mène à un état d'équilibre où le gain d'un joueur ne correspond pas à la perte des autres. Ce genre de jeu non coopératif, appelé jeu à somme non nulle, peut être résolu en trouvant un Équilibre de Nash [39, 40]. Effectivement, le calcul de l'Équilibre de Nash pour un jeu non coopératif est un problème d'optimisation non linéaire. L'équilibre est une combinaison de stratégies, un par joueur, tel que chaque joueur minimise son coût, sachant ce que font les autres. En d'autres termes, l'Équilibre de Nash est considéré comme le point de fonctionnement optimal du jeu.

Un jeu continu avec des ensembles de stratégies infinis innombrables possède un Équilibre de Nash si les ensembles de stratégies sont des espaces métriques compacts et les fonctions de coûts sont continues. Cette affirmation est garantie par la généralisation de Glicksberg du théorème de point fixe de Kakutani [41].

1.5 Optimisation par Séparation - et - Evaluation

La méthode de Séparation - et - Evaluation a été proposée initialement par Land et Doig en 1960 pour la programmation linéaire [42]. Cette méthode est utilisée pour la recherche des solutions optimales des problèmes d'optimisation combinatoire. Ce type d'algorithme a été utilisé pour l'optimisation non-convexe multi-objectif [43].

La méthode de Séparation - et - Evaluation est une décomposition récursive du problème original en sous problèmes disjoints jusqu'à trouver la solution. Cette méthode évite de traiter les sous problèmes susceptibles ne pas contenir de solution. Généralement, cette méthode suit un enchaînement spécifique. Pour chaque itération, l'algorithme sélectionne une région, en appliquant une règle de sélection. Ensuite, il divise la région, en appliquant une règle de division, en régions plus petites, et par la suite trouver les bornes inférieures et supérieures de la fonction sur ces régions en appliquant une règle d'élimination. A chaque valeur de la fonction d'énergie trouvée, les régions ayant des bornes inférieures supérieures à cette dernière, seront élaguées. Mais, si une région ne peut être élaguée, elle sera enregistrée dans la liste des régions non traitées

de l'itération suivante. L'algorithme cherche si un seuil est atteint entre les meilleures bornes supérieure et inférieure sur le minimum, ou une condition d'arrêt est atteinte. Le résultat donné par l'algorithme est l'union entre les régions non élaguées.

Les choix des trois règles basiques diffèrent d'une application à une autre. Cela dépend de la nature du problème à traiter, des régions de recherche et de leur méthode de division. En réalité, la division dépend de la méthode de calcul des bornes des régions. Par exemple, pour les fonctions convexes ou Lipschitz, la règle de délimitation peut profiter de ses propriétés spécifiques.

Pour le cas de Séparation - et - Evaluation par intervalle, on utilise des boites pour définir les régions de recherche, ainsi que leurs sous problèmes divisés et aussi quelques fonctions d'inclusion pour borner la fonction objectif sur les régions sélectionnées. Une description de la méthode de Séparation - et - Evaluation par Intervalle pour résoudre l'Equation 1.1, est donnée par l'Algorithme 1. L'adaptation de l'Algorithme 1 à un

Algorithme 2 : Structure généralisée des algorithmes de Séparation et Évaluation par Intervalle

Données :

- L'ensemble de régions X .
- La fonction objective Φ .

Résultat :

- L'ensemble de régions non élaguées X_S .

- (1) Initialiser la liste des régions à traiter $X_T = X$ et la liste des régions non élaguées finale $X_S = \emptyset$.
 - (2) **tant que** $X_T \neq \emptyset$ **faire**
 - // règle de sélection*
 - Sélectionner une boite X_i de X_T .
 - // règle de division*
 - Calculer $\Phi(X_i)$.
 - // règle d'élimination*
 - (3) **si** X_i ne peut être éliminée **alors**
 - Diviser X_i en $X_i^j, j = 1, \dots, n$ sous intervalles.
 - pour** $j = 1, \dots, n$ **faire**
 - si** X_i^j satisfait le critère d'arrêt **alors**
 - Placer X_i^j dans X_S .
 - sinon**
 - Placer X_i^j dans X_T .
 - (4) Retourner X_S .
-

problème dépend de la fonction objectif $\Phi(x)$ et de l'ensemble de recherche X . La fonction Φ est supposée continue, différentiable et nous pouvons obtenir son vecteur de gradients $\nabla\Phi(x)$. De plus, si la fonction Φ est doublement différentiable, et nous pouvons obtenir sa matrice Hessienne, notée par $H^{(\Phi)}(x)$.

Dans ce cas, les règles les plus utilisées sont :

- **Règle de sélection** : indique quel intervalle de X_T sera traité à l'itération courante. Parmi tous les intervalles X_i^j de X_T , il faut sélectionner un intervalle X_i tel que $\underline{\Phi}(X_i) = \min_{X_i^j \in X_i} \underline{\Phi}(X_i^j)$ pour $\underline{\Phi}(X_i^j) = \min_{x_i^j \in X_i^j} \Phi(x_i^j)$. L'intervalle résultant de $\Phi(X_i)$ est borné par l'intervalle $\Phi(X_i) = \cap_{i=1}^k \Phi_i(X_i)$.
- **Règle de Division** : précise comment diviser l'intervalle à traiter. Dans le cas général, deux intervalles sont générés en utilisant le point milieu \check{X}_i comme point de bisection.
- **Règles d'Élimination** : Les règles de rejet les plus connues sont les suivantes :
 - *Test du point milieu* : Un intervalle X_i est éliminé quand $\underline{\Phi}(X_i) > \hat{\Phi}$, avec $\hat{\Phi}$ est la meilleure borne supérieure connue de l'énergie minimale Φ^* . La valeur de $\hat{\Phi}$ est mise à jour par $\bar{\Phi}(\check{X}_i)$, avec $\check{X}_i = \frac{\bar{X}_i + X_i}{2}$ est le point du milieu de l'intervalle X_i ($\bar{X}_i \equiv \sup(X_i)$ et $\underline{X}_i \equiv \inf(X_i)$) et $\bar{\Phi}(X_i) = \max_{X_i^j \in X_i} \bar{\Phi}(X_i^j)$ pour $\bar{\Phi}(X_i^j) = \max_{x_i^j \in X_i^j} \Phi(x_i^j)$.
 - *Test de coupure* : Quand $\hat{\Phi}$ est améliorée, tout X_i de X_T et de X_S satisfaisant la condition $\underline{\Phi}(X_i^j) > \hat{\Phi}$ est rejeté.
 - *Test de monotonie* : (pour les fonctions différentiables) Si pour un intervalle X_i , une fonction d'inclusion du gradient $\nabla\Phi(X_i)$ est donnée, et qui satisfait la condition $0 \notin \nabla\Phi(X_i)$, alors la fonction objective est monotone sur X_i . Donc, on est pas certain que cet intervalle X_i contient un point stationnaire. Par la suite, cet intervalle sera rejeté.
 - *Test de non convexité* : (pour les fonction doublement différentiable) Si pour un intervalle X_i , une fonction d'inclusion du Hessian $H^{(\Phi)}(X_i)$ est donnée, et qui satisfait la condition $\exists k, H_{kk}^{(\Phi)}(X_i) < 0$. Donc la fonction objectif Φ n'est pas convexe sur X_i . Par la suite, cet intervalle sera rejeté.
 - *Méthode de Newton* : (pour les fonctions différentiables) Si pour un intervalle X_i , une fonction d'inclusion du gradient $\nabla\Phi(X_i)$ et une fonction d'inclusion du Hessian $H^{(\Phi)}(X_i)$ sont données, Nous pouvons trouver tous les zéros du gradient par la méthode de Newton par Intervalle, notée par N , itérativement.

$$N(X_i^{(k+1)}) = \check{X}_i^{(k)} - [\Phi''(X_i^{(k)})]^{-1} \Phi'(\check{X}_i^{(k)})$$

$$X_i^{(k+1)} = N(X_i^{(k+1)}) \cap X_i^{(k)}$$

jusqu'à $X_i^{(k+1)} = \emptyset$ ou $X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)}$ pour k connu. La première condition signifie que l'algorithme n'arrive pas à trouver un optimiseur globale dans X_i . Et la deuxième condition signifie que tous les optimiseurs locaux de X_i sont inclus dans $X_i^{(k+1)}$. Tandis que si $N(X_i^{(k+1)}) \subset X_i^{(k)}$, alors il est démontré

qu'il existe un unique optimiseur local dans l'intervalle $X_i^{(k+1)}$.

- **Règles d'Arrêt** : Un paramètre ϵ détermine la précision voulue de la solution au problème. D'où, un intervalle X_i avec une largeur $\bar{X}_i - X_i \leq \epsilon$ et/ou $\bar{\Phi}(X_i) - \underline{\Phi}(X_i)$ est placé dans la liste finale X_S .

1.6 Conclusion

Au cours de ce premier chapitre, nous avons défini quelques notions de la théorie des graphes, ainsi que la discrétisation des fonctions d'énergies sur les graphes, afin de les adapter aux problèmes de traitement d'images. De plus, nous avons présenté les différentes formes de fonctions d'énergies en segmentation d'images, car c'est dans cette application que la majorité des fonctions ont été proposées dans la littérature.

Nous avons aussi présenté le contexte de ces travaux de thèse à travers les principes de la théorie des jeux, qui vont nous servir par la suite pour poser le cadre général de l'utilisation l'optimisation par intervalles pour résoudre les problèmes d'optimisation des fonctions d'énergie.

Développement d'un Cadre Général Discret basé sur la Théorie de Jeux et l'Optimisation par Séparation - et - Evaluation

2.1	Introduction	22
2.2	Jeu Stratégique Non Coopératif à Potentiels Exactes et Équilibre de Nash	22
2.3	Les Méthodes de Segmentation d'Images basées sur la Théorie des Jeux	30
2.4	Formulation du Problème de Minimisation de Fonctions d'Énergies Convexes en Jeu Stratégique Non-coopératif à Potentiels Exactes Discrets	33
2.5	Séparation-et-Évaluation pour Trouver l'Équilibre de Nash	37
2.6	Conclusion	40

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, une nouvelle formulation du problème de minimisation de fonction d'énergie convexe basée sur la Théorie de Jeux est proposée. Le processus d'optimisation est vu comme étant la recherche d'un Équilibre de Nash (EN) dans un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets. Ce choix est motivé par le fait que l'unicité de l'EN est garantie quand le jeu utilisé est de forme potentielle exacte pour modéliser la minimisation d'une fonction globale convexe, continue et différentiable. Ce problème, ainsi formulé, est combinatoire sur un graphe impliquant un ensemble fini de joueurs. Pour le cas d'un jeu discret, le nombre de variables est égal à la somme du nombre de joueurs. La complexité du jeu dépend du nombre de stratégies disponibles dans le jeu, ainsi que du nombre de joueurs [44]. Chaque joueur sélectionne un pixel qui doit être classé, et après avoir révélé son choix ou sa stratégie, il reçoit un paiement ou un coût selon la similarité de ce pixel, par rapport à ses adversaires. Par conséquent, le problème de minimisation, sous contraintes, est formulé comme étant un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets. Par la suite, il est résolu en cherchant l'EN via un nouvel algorithme d'optimisation.

Au cours ce chapitre, nous allons définir quelques notions de la théorie des jeux qui seront nécessaires pour la suite de ce manuscrit. Aussi, nous allons donner des brefs aperçus de quelques travaux de traitement d'image réalisés en utilisant la théorie des jeux. Ensuite, nous allons reformuler notre problème de minimisation d'énergie convexe en le présentant comme un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets. Finalement, un algorithme d'optimisation propre à ce type de problème discret convexe est présenté.

2.2 Jeu Stratégique Non Coopératif à Potentiels Exactes et Équilibre de Nash

La théorie des jeux est une branche mathématique qui permet la modélisation et l'analyse des interactions entre plusieurs décideurs, appelés joueurs. Ces derniers peuvent avoir des objectifs contradictoires et/ou communs. Un jeu est une situation, dans laquelle, le bénéfice ou le coût est réalisé par chaque joueur à partir d'une situation interactive. Ce coût ne dépend pas seulement de ses propres décisions mais aussi de celles prises par d'autres joueurs (co-joueurs). Par conséquent, les actions et les objectifs des joueurs sont totalement couplés. En optimisation classique, certaines fonctions

doivent être optimisées sous quelques contraintes. Cependant la décision ou la stratégie optimale n'a pas généralement un sens clair dans des situations interactives impliquant plusieurs décideurs, car aucun d'entre eux ne contrôle toutes les variables du problème, et ces joueurs peuvent aussi avoir des objectifs différents.

2.2.1 Jeux de Forme Stratégique

Pour tirer parti des jeux stratégiques et de ses outils théoriques associés, la première étape consiste à modéliser le problème sous forme de jeu stratégique. Un jeu normal stratégique comprend trois éléments :

- ▷ Un ensemble de joueurs, qui représentent les acteurs principaux du problème. Ces joueurs ont des intérêts contradictoires, affectant la performance de chaque joueur participant au jeu ;
- ▷ Un ensemble d'actions ou de stratégies pures pour chaque joueur, qui détermine ce que chacun peut faire. Selon le type de cet ensemble de stratégies, nous pouvons déterminer si le jeu est discret ou continu. Si l'ensemble de stratégies est discret, le jeu est dit discret. Dans le cas où l'ensemble est un espace métrique, le jeu est dit continu ;
- ▷ Une fonction de coût (ou utilité) pour chaque joueur, qui mesure le degré de satisfaction en fonction des choix d'un ensemble de joueurs en interaction avec cette fonction. Les fonctions de coûts représentent les préférences de chaque joueur par rapport aux profils de stratégies, où un profil de stratégie est simplement une liste de stratégies, une pour chaque joueur.

La description ci-dessus est bien très généralisée, et donne une vue globale sur la notion du jeu stratégique.

Définition 2.2.1. (*Jeu Stratégique*)

Un jeu stratégique de μ joueurs, Ω , est un tuple (Π, X, C) où :

- ◇ Π est un ensemble fini de $\mu = |\Pi|$ joueurs. chaque joueur π_r est indexé par r avec $1 \leq r \leq \mu$;
- ◇ $X = X_1 \times \dots \times X_\mu$, où $X_r, \forall \pi_r$ est un espace métrique compact dans le cas d'un jeu continu, et un ensemble de stratégies discrets pour les jeux discrets. Chaque vecteur $x = (x_1, \dots, x_\mu) \in X$ est appelé le profil de stratégies ;
- ◇ $C = (C_1, \dots, C_\mu)$ où $C_r : X \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction du coût réelle appropriée au joueur π_r .

□

La notation $x_{-(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\mu)$ (respectivement $X_{-(i)} = X_1, \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_\mu$) est utilisée pour dénoter les stratégies (respectivement l'ensemble des stratégies ou l'espace métrique compact) pour tous les joueurs à l'exception du joueur π_{ih} . Une nouvelle notation qui définit le profil d'actions est donnée par $x = (x_{ih}, x_{-(i)})$ (respectivement $X = X_{ih} \times X_{-(i)}$). La même notation sera utilisée pour l'ensemble des joueurs et l'ensemble des joueurs contenant tous les joueurs à l'exception du joueur π_{ih} sera noté par $\Pi_{-(i)}$. Dans le reste du manuscrit, les deux notations suivantes sont équivalentes $-i \equiv -(i)$. La manipulation des jeux discrets est plus facile, moins complexe et suffisante pour les problèmes convexes.

La forme stratégique est caractérisée par une présence simultanée de deux fonctionnalités clés :

- ▷ chaque joueur π_{ih} peut avoir ses propres objectifs, qui sont présentés par une fonction spécifique à ce joueur.
- ▷ chaque joueur π_{ih} a un contrôle partiel sur sa fonction de coût car il peut contrôler sa stratégie $x_{ih} \in X_{ih}$ seulement.

Généralement, un jeu de type stratégique coopératif est un jeu transparent pour tous les joueurs, c'est à dire, chaque joueur connaît les structures stratégiques de ses adversaires ainsi que les moindre détails de leurs intentions et des informations qu'ils ont sur lui. Ce qui n'est pas le cas pour les jeux non coopératifs.

2.2.2 Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash (EN) est un concept fondamental en théorie des jeux, plus précisément la forme stratégique. Ce paragraphe est dédiée à la notion d'équilibre de Nash. Dans [38], Nash propose un concept de solution simple mais puissant, qui est connu sous le nom d'équilibre de Nash (EN), appelé aussi le point de Nash. Il est considéré comme la méthode de prédiction d'une interaction stratégique en sciences sociales. Un équilibre de Nash pure-stratégie est un profil de stratégies où aucun joueur ne peut obtenir un coût plus bénéfique en déviant unilatéralement de ce profil x^* . Nous allons fréquemment faire référence à tous les joueurs autres que le joueur donné i comme "les opposés de joueur π_{ih} ", et nous notons ces derniers par " $\pi_{-(i)}$ ". En d'autres termes, cette terminologie ne signifie pas que les joueurs essayent de battre le joueur π_i . Par contre, chaque joueur a pour objectif de minimiser sa propre fonction de coût, et par la suite il peut faire appel à "l'aide" ou faire "nuire" les autres joueurs.

Définition 2.2.2. (*EN Pur*)

Un profile de stratégies $x^* = (x_1^*, \dots, x_\mu^*) = (x_i^*, x_{-(i)}^*)$ est dit équilibre de Nash si $\forall x_i \in X_i, 1 \leq i \leq \mu$

$$C_i(x_i^*, x_{-(i)}^*) \leq C_i(x_i, x_{-(i)}^*) \quad (2.1)$$

□

Définition 2.2.3. (*EN Mixte*)

Un profile de stratégies mixtes $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_\mu^*) = (\sigma_i^*, \sigma_{-(i)}^*)$ est dit équilibre de Nash mixte si $\forall \sigma_i \in \Sigma_i, 1 \leq i \leq \mu$

$$\tilde{C}_i(\sigma_i^*, \sigma_{-(i)}^*) \leq \tilde{C}_i(\sigma_i, \sigma_{-(i)}^*) \quad (2.2)$$

avec

$$\tilde{C}_i(\sigma_i, \sigma_{-(i)}) = \sum_{x \in X} \left(\prod_{j=1}^{\mu} \sigma_j(x_j) \right) C_i(x) \quad (2.3)$$

est la fonction de coût du joueur π_i en fonction de la stratégie mixte σ_i , et $X = X_1 \times \dots \times X_\mu$. □

Par définition, un EN d'un jeu Ω est un point tel que, pour chaque joueur π_i , la fonction $C_i(x)$ ne peut être augmentée strictement seulement par changement de la valeur de x_i à l'équilibre. Pour cette raison, un EN est dit stratégiquement stable aux déviations unilatérales. L'EN a deux autres particularités importantes :

- Pour la version mixte, son existence est garantie pour la classe des jeux de plateau.
- Il peut engendrer une interaction répétée entre les joueurs, seulement ceux qui sont partiellement informés au sujet du problème.

Il existe des algorithmes distribués et/ou d'apprentissages, bien connus, qui peuvent converger à l'EN efficacement.

L'étude de l'existence d'un EN pour un jeu de forme stratégique, Ω , nécessite l'introduction de la notion de Meilleure Réponse (MR).

Définition 2.2.4. (*Meilleure Réponse MR*)

La meilleure réponse (MR) du joueur π_i , $MR_i(x_{-i})$ du vecteur de stratégies x_{-i} est la fonction de valeurs définies :

$$MR_i(x_{-i}) = \arg \min_{x_i \in X_i} C_i(x_i, x_{-(i)}) \quad (2.4)$$

Par la suite, La meilleure réponse globale du jeu Ω est définie comme suit :

$$\begin{aligned} MR : X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow MR_1(x_{-1}) \times \dots \times MR_\mu(x_{-\mu}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

□

Pour un jeu stratégique Ω , un profile de stratégies x^{EN} est un EN si et seulement si $x^{EN} \in MR$. La description d'un EN en terme de point fixe est due à Nash [38], vue l'existence commune des théorèmes en se basant sur des hypothèses topologiques et géométriques comme la compacité des ensembles des stratégies ou la continuité des fonctions de coûts. Les deux théorèmes suivants montrent que l'EN est un concept de solution attractif du point de vue problème d'existence. De plus, ils montrent que tout jeu fini ou jeu continu compact possède au moins un EN mixte.

Theorème 2.2.1.

Dans un jeu stratégique $\Omega = (\Pi, X, C)$, si Π est fini et X est fini pour chaque joueur π_i , donc il existe au moins un EN, éventuellement impliquant des stratégies mixtes. □

Theorème 2.2.2.

Dans un jeu stratégique $\Omega = (\Pi, X, C)$, si X_i est compact et C_i est continu dans $x \in X$, $\forall \pi_i \in \Pi$, il existe au moins un EN, éventuellement impliquant des stratégies mixtes. □

2.2.3 Jeu Potentiel

Un jeu stratégique est dit potentiel si, $\forall \pi_i \in \Pi$, $x_i, x'_i \in X_i$ et $x_{(-i)} \in X_{(-i)}$, la différence $C_i(x_i, x_{(-i)}) - C_i(x'_i, x_{(-i)})$ peut dépendre de la fonction potentielle globale $\Phi(x)$. Il existe au moins quatre types de jeux potentiels : pondéré, exact, ordinal et généralisé (ou pseudo-potentiel). Le type d'un jeu potentiel dépend de la relation entre les différences des coûts et la fonction potentielle [45].

2.2.3.1 Classes de Jeux Potentiels

Définition 2.2.5. (*Jeu Potentiel Exact*)

Un jeu est dit potentiel exact, s'il existe une fonction potentielle Φ telle que

$$C_i(x_i, x_{(-i)}) - C_i(x'_i, x_{(-i)}) = \Phi(x_i, x_{(-i)}) - \Phi(x'_i, x_{(-i)}) \tag{2.6}$$

□

Définition 2.2.6. (*Jeu Potentiel Pondéré*)

Soit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ un vecteur de poids positifs. Un jeu est dit «potentiel pondéré» ou simplement ω -potentiel, s'il existe une fonction potentielle Φ telle que

$$C_i(x_i, x_{(-i)}) - C_i(x'_i, x_{(-i)}) = \omega_i(\Phi(x_i, x_{(-i)}) - \Phi(x'_i, x_{(-i)})) \tag{2.7}$$

□

Pour démontrer qu'un jeu potentiel est pondéré, il suffit de vérifier pour chaque fonction de coût différentiable sur l'espace de stratégies continu, la condition suivante.

$$\frac{\partial C_i(x)}{\partial x_i} = \omega_i \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right), \forall i \in N, x \in X \quad (2.8)$$

Définition 2.2.7. (*Jeu Potentiel Ordinal*)

Un jeu Ω est dit potentiel ordinal, s'il admet un potentiel ordinal. Une fonction Φ est un potentiel ordinal pour Ω , si $\forall \pi_i \in \Pi, \forall x_{(-i)} \in X_{(-i)}$

$$C_i(x_i, x_{(-i)}) - C_i(x'_i, x_{(-i)}) > 0 \text{ ssi } \Phi(x_i, x_{(-i)}) - \Phi(x'_i, x_{(-i)}) > 0, \forall x_i, x'_i \in X_i \quad (2.9)$$

□

En d'autres termes, si un joueur π_i obtient un meilleur (respectivement pire) coût unilatéralement déviant d'une stratégie à une autre, la fonction potentielle croît (respectivement décroît) ainsi que la déviation. Pour démontrer qu'un jeu potentiel est ordinal, il suffit de vérifier la condition suivante, pour chaque fonction de coût différentiable sur un espace de stratégies continu.

$$\frac{\partial C_i(x)}{\partial x_i} > 0 \text{ ssi } \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} > 0, \forall \pi_i \in \Pi, x \in X \quad (2.10)$$

Définition 2.2.8. (*Jeu Pseudo-Potentiel*)

Une jeu Ω est dit pseudo-potentiel, s'il existe une fonction Φ dite fonction pseudo-potentielle liée au jeu Ω telle que $\forall \pi_i \in \Pi, \forall x_{(-i)} \in X_{(-i)}$

$$\arg \min_{x_i \in X_i} C_i(x_i, x_{(-i)}) \supseteq \arg \min_{x_i \in X_i} \Phi(x_i, x_{(-i)}) \quad (2.11)$$

□

La figure 2.1 donne une vue globale sur les relations entre les différentes classes des jeux potentiels.

2.2.3.2 Propriétés des Jeux Potentiels

L'intérêt des jeux potentiels est de garantir l'existence d'un EN de pure stratégie en étudiant une seule fonction potentielle, ce qui permet l'application des outils théoriques empruntés d'autres disciplines, comme l'optimisation convexe [46]. Un point minimum de Φ est un EN pour un jeu Ω potentiel. Les propriétés les plus importantes des jeux potentiels peuvent être discutés en deux parties : l'existence de l'EN et la convergence d'un processus d'apprentissage vers l'EN.

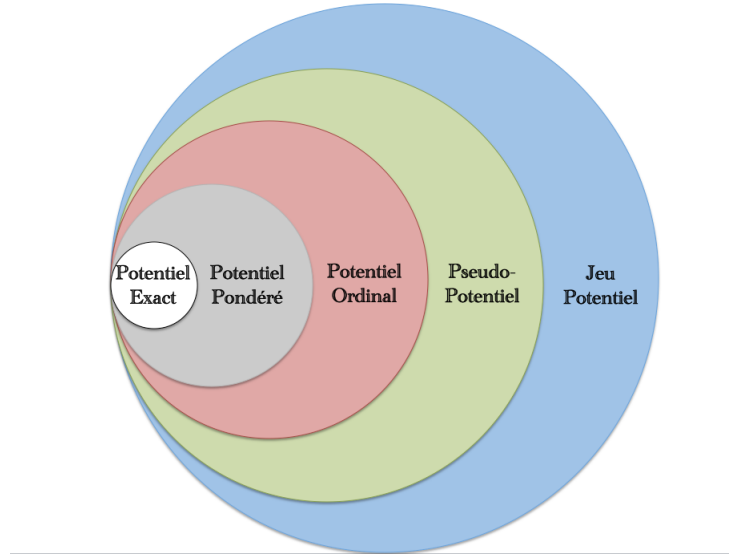


FIGURE 2.1 – Rapports d'inclusion entre les différentes classes de jeux potentiels.

2.2.3.3 Existence de l'Équilibre de Nash

Les deux remarques suivantes caractérisent l'existence de l'EN dans les jeux potentiels finis.

Remarque 2.2.1. *Si Φ est une fonction potentielle d'un jeu potentiel ordinal $\Omega = (\Pi, X, C)$, l'ensemble d'équilibres de ce jeu Ω coïncide avec l'ensemble d'équilibres du jeu de coordination $\Omega' = (\Pi, X, \Phi)$ [47]* □

Remarque 2.2.2. *Chaque jeu potentiel ordinal possède un EN de pures stratégies [47].* □

Par conséquent, $\forall x^* \in X$ qui minimise Φ est un équilibre de pure stratégies de Ω . Cependant, l'inverse n'est pas toujours vrai. Il pourrait y être des EN de pures stratégies ou mixtes, qui sont seulement des points minimaux de Φ . Sauf si l'espace de stratégies est convexe et Φ est continuellement différentiable sur l'espace de stratégies, alors chaque EN de Ω est un point minimum de Φ . Un tel EN est unique si Φ est strictement convexe. Une conclusion importante de la remarque 2.2.1 est que les jeux potentiels peuvent être étudiés en utilisant deux différentes approches :

1. Le framework classique de la théorie des jeux appliqué au jeu Ω ;
2. Le framework de la théorie d'optimisation classique appliqué sur les fonctions potentielles.

Pour les jeux potentiels infinis, l'EN existe sous quelques restrictions :

Remarque 2.2.3. *Chaque jeu potentiel ordinal possède un ϵ -équilibre¹ [47].* □

Remarque 2.2.4. *Chaque jeu pseudo-potentiel, avec un ensemble de stratégies compacte et une fonction potentielle continue, possède un EN de pures stratégies [48].* □

Notons que l'existence d'une fonction de coût continue ne garantit pas l'existence d'une fonction potentielle continue [49]. Par contre, pour les jeux potentiels de type exact et de type pondéré, la fonction potentielle est continue, si et seulement si les fonctions de coûts sont continues. Pour les jeux potentiels infinis, l'EN existe sous des conditions restrictives. Cependant, ces restrictions ne sont pas très strictes. En pratique, une large famille de fonctions potentielles est continue et l'espace de stratégies est compact. Notons que toutes les relations décrites précédemment concernant les EN et les fonctions de potentielles tiennent toujours pour les jeux potentiels infinis [49].

2.2.3.4 Convergence vers l'Équilibre de Nash

Un *chemin* dans un ensemble de stratégies X est une séquence $\chi = (x^0, x^1, \dots)$ telle que $x^k = (x_{(-i)}^{k-1}, y)$ pour $y \in X_i$. En d'autres termes, pour chaque étape k , seulement un joueur est permis de dévier. x^0 est le point initial du chemin. Le joueur π_i est appelé le déviateur dans l'étape k . χ est un *chemin d'amélioration* par rapport à Ω si $C_i(x^k) < C_i(x^{k-1}), \forall k \geq 1$. Ω a une Propriété d'Amélioration Fini (PAF) si chaque chemin d'amélioration est fini.

Remarque 2.2.5. *Chaque jeu potentiel ordinal fini a un PAF [47].* □

Il est évident que chaque chemin d'amélioration fini d'un jeu potentiel ordinal doit atteindre un point d'équilibre. C'est-à-dire que la séquence des meilleures réponses unilatérales converge vers l'équilibre indépendamment du point initial. Notons que l'ordre dans lequel les joueurs dévient vers une meilleure réponse, peut être déterministe ou aléatoire, et il a besoin d'être synchronisé. C'est la propriété la plus importante des jeux potentiels spécialement pour la recherche distribuée de l'équilibre des systèmes auto-organisés. Notons que chaque jeu fini avec un PAF n'est pas un jeu potentiel ordinal. Par contre, dans [47], il est prouvé que chaque jeu fini possède le PAF, si et seulement s'il est un jeu potentiel ordinal généralisé. Tous les chemins d'amélioration dans un jeu potentiel infini peuvent ne pas être finis. Les chemins d'amélioration sont construits en se basant sur la meilleure réponse entre deux choix et non pas entre plus

1. Une stratégie x^* est un ϵ -équilibre du jeu Ω s'il n'y a pas de joueur qui peut gagner plus que ϵ par une déviation unilatérale à partir de cette stratégie.

que deux choix. Cependant, il n'existe pas un cycle de meilleures réponses dans un jeu pseudo-potentiel infini [48].

Un chemin $\chi = (x^0, x^1, \dots)$ est un chemin ϵ -amélioration par rapport à Ω si $\forall k \geq 1, C_i(x^k) < C_i(x^{k-1}) + \epsilon$, où π_i est l'unique déviateur de l'étape k . Le jeu Ω satisfait la propriété d'amélioration finie approximative (PAFA) si $\forall \epsilon > 0$, d'où chaque chemin ϵ -amélioration est fini.

Remarque 2.2.6. *Chaque jeu potentiel ordinal fini avec des fonctions de coûts bornées a un PAFA [47].* □

La propriété de stabilité de l'EN pour un jeu pseudo-potentiel est résumée par les remarque suivantes :

Remarque 2.2.7. *Pour les jeux pseudo-potentiels finis, la séquence des meilleures réponses converge vers un EN [50].* □

Remarque 2.2.8. *Pour les jeux pseudo-potentiels infinis avec un espace de stratégies convexe et une meilleure réponse unique, la séquence des meilleures réponses simultanées converge vers un EN du jeu [50].* □

En d'autres termes, si les joueurs commencent avec un profile de stratégies arbitraire et simultanément dévient vers leurs uniques meilleures réponses dans chaque période, le processus se termine sur un EN après un nombre fini d'étapes. Pour éliminer les conditions qui limitent l'existence générale de l'EN et la convergence du processus d'apprentissage vers cet équilibre, on doit quantifier l'espace de stratégies et construire un espace de stratégies discret. Dans différentes applications, utilisant la technique de quantification, un jeu potentiel infini convertit en un jeu potentiel fini.

2.3 Les Méthodes de Segmentation d'Images basées sur la Théorie des Jeux

Il existe quelques travaux utilisant la théorie des jeux pour modéliser la segmentation d'image. Dans ce paragraphe, nous présentons ces méthodes.

Dans [51], les auteurs adaptent une procédure de prise de décision en utilisant un jeu parallèle pour la segmentation d'images. Cette dernière est formulée comme étant un jeu non coopératif à somme non nulle avec deux joueurs. L'objectif de ce jeu est de prendre une décision entre deux modules de segmentation ; la première est fondée sur les régions et la deuxième est fondée sur la détection des contours. Ce

système contient deux modules qui opèrent en parallèle. De plus, le résultat de chaque module est retourné vers l'autre après chaque étape de prise de décision. Le jeu s'arrête quand aucun des deux modules ne peut améliorer ses résultats, et la solution finale est considérée comme étant un EN. Dans ce cas, l'EN est considéré comme le minimum des fonctions de coûts pour les deux décideurs. Ce modèle est performant quand il est appliqué sur des images bruitées et sur des modèles déformables. Par contre, ce modèle ne garantit ni la convergence vers l'EN, ni l'unicité de cet équilibre.

Dans [52], les auteurs utilisent une approche basée sur les jeux de Nash pour joindre la restauration et la segmentation. Ce jeu est statique avec des informations complètes, et la solution considérée est un EN. Cet équilibre est calculé à partir d'une méthode itérative avec relaxation. Cette approche propose un jeu à deux joueurs : un représentant la restauration, avec les intensités de l'image comme ensemble de stratégies. Tandis que l'autre représente la segmentation fondée sur la détection des contours comme ensemble de stratégies. L'objectif de cette approche est de trouver l'EN, qui est considéré comme un minimum de la fonction principale du problème défini. Par contre, la convergence vers l'EN nécessite une convexité de la fonction d'énergie, qui n'est pas garantie dans l'approche proposée.

Zeng et al. [53] intègrent la théorie des jeux pour la segmentation d'image dans le but de résoudre le problème de segmentation multi-labels. Les données nécessaires pour cet algorithme incluent l'image à segmenter et les marqueurs. Le résultat est la labellisation de l'image d'entrée. Dans ce travail, les auteurs ont conçu m jeux parallèles agissant sur m couches séparées. Pour chaque joueur, sur une couche l , une stratégie est attribuée au hasard pour coopérer ou s'opposer, tandis qu'un joueur est affecté pour chaque marqueur. Les joueurs procèdent sur un graphe pour obtenir le minimum d'une énergie via la maximisation du paiement total. Ce modèle fournit des résultats plus vite que ceux donnés par Graph Cut [54], même avec une plus large fenêtre et plus de marqueurs. Par contre, ce jeu est répété de façon itérative jusqu'à atteindre un état stable évolutif. Ceci est atteint quand une partie des joueurs, ceux qui changent leurs stratégies, passent en dessous d'un seuil bien défini. L'approximation du paiement maximal ne garantit pas la convergence vers l'optimum.

Shen et al. [55] appliquent un groupe de jeux évolutifs pour la segmentation d'image. Dans cette approche, des groupes de pixels sont dérivés d'une compétition d'individus procédant à un regroupement de jeux. Ce jeu est symétrique évolutif impliquant deux joueurs. Chaque joueur sélectionne des pixels simultanément. Et ces joueurs doivent être regroupés, et après avoir révélé leurs choix, ils reçoivent un paiement en fonc-

tion de leurs similarités. Ce paiement permet de sélectionner les pixels par rapport à leurs adversaires. L'équilibre stable évolutif peut déterminer un groupe de pixels dans une image associée. Cette approche de segmentation est équivalente à une approche de regroupement non supervisée, et elle ne nécessite pas l'initialisation du nombre de marqueurs en avance. Mais, elle ne garantit pas que l'EN atteint correspond à la meilleure segmentation, à cause de la non unicité de l'EN pour le jeu proposé.

Dans [56], les auteurs présentent un algorithme pour segmenter des images de cellules automatiquement. Cet algorithme combine deux modèles de jeux. Pour les deux modèles, chaque pixel agit indépendamment comme un joueur pour sélectionner sa meilleure stratégie de marquage. Dans un jeu non coopératif, les joueurs choisissent leurs stratégies à partir des informations locales aux pixels. Et dans un jeu coopératif, les joueurs profitent du tout le groupe de pixels afin de choisir la meilleure stratégie de marquage. Toutefois, l'existence et la convergence vers un EN ne sont pas garanties pour ce modèle.

Dans [57], le jeu utilisé, pour la segmentation d'image, fusionne les résultats générés par la segmentation fondée sur les régions, et celle fondée sur la détection de contour. Un jeu coopératif est utilisé pour améliorer les résultats des deux méthodes. Ainsi, ce modèle décide pour une liste de pixels, s'ils appartiennent à l'intérieur du contour ou à l'extérieur. Alors, cette approche tente de trouver un équilibre entre les deux types de segmentations. Ce modèle ne soulève pas les problèmes d'existence et la convergence de cet équilibre.

Yu et al. [58] proposent un algorithme de relaxation basé sur la théorie des jeux pour résoudre le problème de marquage des images. Le but de ce jeu est de trouver le maximum de probabilité a posteriori. L'idée de base consiste à placer un joueur sur chaque site de l'image, et les stratégies des joueurs sont les marqueurs. Les fonctions de paiements sont inspirées de la modélisation Bayésienne des champs de Markov aléatoires. D'où, la fonction de paiement de chaque joueur dépend seulement des stratégies des ses voisins, et le paiement total est égal à la somme de tous les paiements de tous les joueurs. L'ensemble de solutions d'un jeu pareil est vu comme étant un EN. Pour ce cas, la solution de ce jeu correspond à un maximum local de la probabilité a posteriori. Mais, si les fonctions de paiements possèdent plusieurs maximums locaux, cette méthode peut se coincer dans un maximum local au lieu d'atteindre le maximum global.

Le modèle de segmentation proposé par Wang et al. [59] est construit à partir d'une estimation des probabilités d'appartenances des pixels à l'ensemble des super-pixels,

par un framework d'apprentissage non paramétrique. Les probabilités sont mises à jour itérativement, en utilisant un jeu basé sur l'optimisation des stratégies. Ce modèle garantit la convergence vers l'EN itérativement, pour stabiliser la solution. Par contre, il ne garantit pas l'unicité de cet équilibre.

2.4 Formulation du Problème de Minimisation de Fonctions d'Énergies Convexes en Jeu Stratégique Non-coopératif à Potentiels Exacts Discrets

Le problème d'optimisation des fonctions d'énergies est formulée sous la forme d'un jeu. Le but du jeu proposé est d'affecter chaque nœud $v_i \in V$ du graphe, à un objet marqué $h \in L$, selon la valeur d'un potentiel x_{ih} . Chaque variable x_{ih} obtient une valeur après la minimisation de la fonction d'énergie. Dans le contexte de la théorie des jeux, le minimum d'une fonction d'énergie modélisée par un jeu stratégique non-coopératif à potentiels exacts, est équivalent à la recherche de l'équilibre de Nash. De plus, les stratégies sélectionnées pour cet équilibre correspondent aux valeurs finales des potentiels x_{ih} , $\forall i \in N$ et $\forall h \in L$. Par conséquent, l joueurs sont placés sur chaque nœud v_i (avec $l = |L|$). Un exemple illustratif est présenté par la Figure 2.2. Chaque nœud du graphe correspond à un pixel de l'image à segmenter. Il est relié à ses voisins par des arêtes. Figure 2.2 (b) est un échantillon de nœuds du graphe G . Sachant que trois objets doivent être segmentés, trois labels sont placés sur l'image. Ensuite, trois joueurs sont attribués à chaque nœud, comme nous pouvons voir sur Figure 2.2 (c).

Pour ce cas d'étude, nous définissons un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts par $\Omega = (\Pi = (N \times L), X, C)$ où N est l'ensemble de pixels de l'image avec $n = |N|$, L est l'ensemble des objets marqués utilisés pour la segmentation. Pour jouer un jeu, chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$ sélectionne une stratégie $x_{ih} \in X_{ih}$. Dans ce cas d'étude, la résolution du problème consiste à sélectionner un ensemble de stratégies le plus restreint que possible $X_{ih} \in [0,1]$ pour chaque joueur π_{ih} . Soit la forme généralisée des énergies adressées par les méthodes basées sur des graphes est la suivante (Equation 2.12).

Pour la suite de ce manuscrit, nous allons renommer $\phi_{\text{régularisation}}$ par ϕ^r et $\phi_{\text{fidélité-données}}$ par ϕ^f . De plus, chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$, a sa fonction de régularisation, notée par ϕ_{ih}^r et sa fonction de fidélité aux données, notée par ϕ_{ih}^f .

$$\Phi(x) = \sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} \left[\phi_{ih}^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(r)}) + \lambda \cdot \phi_{ih}^f(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(f)}) \right], \quad (2.12)$$

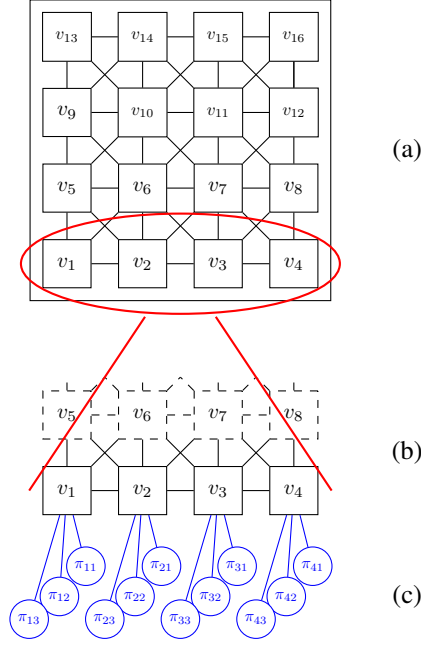


FIGURE 2.2 – Un exemple illustratif de joueurs sur un graphe G .

où $x^{(r)} = (x_{ih}, x_{-(ih)}^{(r)}) \in X^{(r)} = [0,1]^{n^{(r)} \times l^{(r)}}$ est l'ensemble des potentiels participants à ϕ_{ih}^r avec $1 \leq n^{(r)} \leq n$ et $1 \leq l^{(r)} \leq l$, $x^{(f)} = (x_{ih}, x_{-(ih)}^{(f)}) \in X^{(f)} = [0,1]^{n^{(f)} \times l^{(f)}}$ est l'ensemble des potentiels participant à ϕ_{ih}^f avec $1 \leq n^{(f)} \leq n$ et $1 \leq l^{(f)} \leq l$, aussi λ , est un paramètre qui contrôle le compromis entre ϕ_{ih}^f et ϕ_{ih}^r , $\forall \pi_{ih} \in \Pi$. La fonction $\phi_{ih}^f(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(f)})$ est un terme de fidélité aux données mesurant le taux d'appartenance du nœud v_i à l'objet labelé par h en estimant le degré de similarité entre eux. La fonction $\phi_{ih}^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(r)})$ mesure l'interaction entre les paires de nœuds et la dépendance entre tous les nœuds du graphe. Ce terme est appelé terme de régularisation. La Figure 2.3 détaille le processus de minimisation de la fonction d'énergie généralisée sur un petit graphe. Pour cet exemple $L = \{1,2,3,4\}$. Figure 2.3 (b) montre les graphes qui représentent les résultats obtenus après $\sum_{e_{ij} \in E} \phi_{ih}^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^r)$, $\forall h \in L$. Figure 2.3 (c) présente le graphe final des résultats après la minimisation de Φ . La minimisation du premier terme $\sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} \phi_{ih}^f(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(f)})$ construit un graphe 8-connecté (Figure 2.3 (a)). Ce graphe présente le résultat de évaluation de la similarité entre chaque nœud et l'objet à segmenter. La minimisation du second terme $\sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} \phi_{ih}^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(r)})$, $\forall h \in L$ donne le contour d'un objet h pour chaque marquer de L (Figure 2.3 (b)). Dans ce cas, la minimisation du terme général Φ est équivalente à l'association des résultats de minimisation des deux termes $\sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} \phi_{ih}^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(r)})$ et $\sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} \phi_{ih}^f(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(f)})$, $\forall h \in L$, qui figurent dans la Figure 2.3 (c).

Généralement, le jeu est basé sur l'analyse des coûts pour chaque joueur, comme

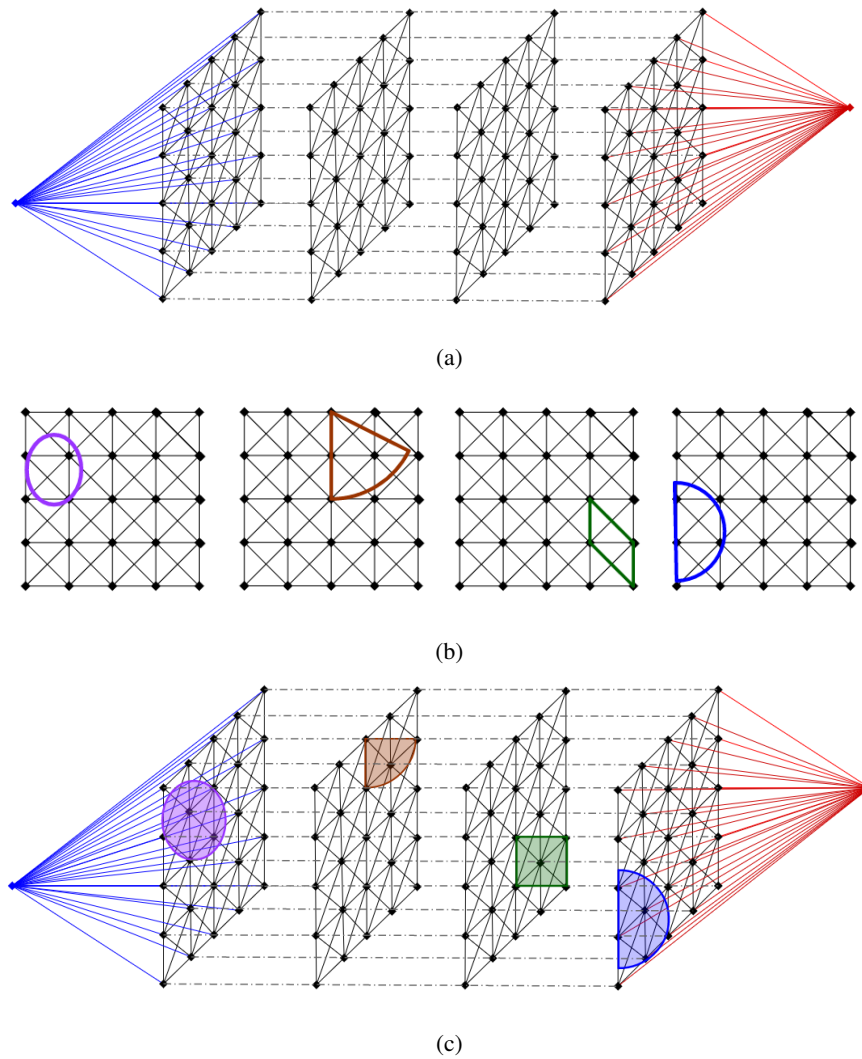


FIGURE 2.3 – Illustration des étapes de construction du graphe des résultats de segmentations après minimisation de Φ .

modèle de paiement. Par la suite, pour le modèle de paiement, la fonction d'énergie globale est reformulée en une fonction d'énergie locale à chaque joueur π_{ih} . Ces fonctions locales d'énergies, appelées fonctions de coûts du jeu, notées C_{ih} , sont spécifiques au joueur π_{ih} et impliquent un sous ensemble de variables de $x^{C_{ih}}$ qui participent forcément au calcul de la fonction d'énergie globale. En d'autres termes, une fonction de coût C_{ih} du joueur π_{ih} dépend de sa stratégie et celles des autres joueurs qui participent forcément au dérivé partiel de cette fonction d'énergie globale : Phi par rapport à x_{ih} , $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_{ih}}$. Cet ensemble de joueurs est noté $x^{(C_{ih})} \subseteq x$. C'est-à-dire, les variables participantes en $C_{ih}(x^{(C_{ih})})$, $x^{(C_{ih})} \in X^{(C_{ih})}$ sont les joueurs que leurs variations affectent la variation de cette fonction de coût. Alors, la fonction $C_{ih}(x^{(C_{ih})})$ spécifie comment

chaque joueur évalue chaque profile de stratégies. Ce choix est motivé par le fait que les participants à ce jeu suivent une action d'interaction stratégique entre eux. Si nous optons à évaluer cette interaction, elle peut varier de zéro à l'infini, selon la relation entre les joueurs au sein de la fonction d'énergie globale à minimiser.

Comme nous l'avons déjà défini, un jeu en forme stratégique est dit potentiel exact si la motivation de tous les joueurs à changer leurs stratégies peut être exprimée en une seule fonction appelée le potentiel du jeu [40]. Pour la fonction d'énergie proposée Φ , la fonction de coût pour chaque joueur π_{ih} doit satisfaire la condition définie précédemment par Equation 2.2.5, pour la considérer comme étant la fonction globale d'un jeu potentiel exact.

Pour extraire la fonction de coût C_{ih} , $\forall \pi_{ih} \in \Pi$ de la fonction d'énergie générale Φ présentée par l'Equation 2.12, nous appliquons la Définition 2.2.5, et nous obtenons la forme suivante (Equation 2.13).

$$\begin{aligned}
& \Phi(y_{ih}, x_{-(ih)}) - \Phi(z_{ih}, x_{-(ih)}) = \\
& \phi_{ih}^r(y_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{rég})}) + \lambda \cdot \phi_{ih}^f(y_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{fid})}) \\
& + \sum_{\substack{v_k \in V, \\ k \neq i}} \left[\phi_{kh}^r(x_{kh}, x_{-(kh)}^{(D_{kh})}) + \lambda \cdot \phi_{kh}^f(x_{kh}, x_{-(kh)}^{(B_{kh})}) \right] \\
& + \sum_{\substack{g \in L, v_k \in V \\ g \neq h}} \left[\phi_{kg}^r(x_{kg}, x_{-(kg)}^{(D_{kg})}) + \lambda \cdot \phi_{kg}^f(x_{kg}, x_{-(kg)}^{(B_{kg})}) \right] \\
& - \phi_{ih}^r(z_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{rég})}) - \lambda \cdot \phi_{ih}^f(z_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{fid})}) \\
& - \sum_{\substack{v_k \in V, \\ k \neq i}} \left[\phi_{kh}^r(x_{kh}, x_{-(kh)}^{(D_{kh})}) + \lambda \cdot \phi_{kh}^f(x_{kh}, x_{-(kh)}^{(B_{kh})}) \right] \\
& - \sum_{\substack{g \in L, v_k \in V \\ g \neq h}} \left[\phi_{kg}^r(x_{kg}, x_{-(kg)}^{(D_{kg})}) + \lambda \cdot \phi_{kg}^f(x_{kg}, x_{-(kg)}^{(B_{kg})}) \right] \\
& = \phi_{ih}^r(y_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{rég})}) + \lambda \cdot \phi_{ih}^f(y_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{fid})}) \\
& - \phi_{ih}^r(z_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{rég})}) - \lambda \cdot \phi_{ih}^f(z_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{fid})})
\end{aligned} \tag{2.13}$$

En utilisant le résultat retourné par l'Equation 2.13, la fonction de coût de l'Equation 2.12 doit avoir la forme suivante (Equation 2.14).

$$C_{ih}(x^{(C_{ih})}) = \phi_{ih}^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{rég})}) + \lambda \cdot \phi_{ih}^f(x_{ih}, x_{-(ih)}^{(\text{fid})}) \tag{2.14}$$

Pour montrer la relation entre les fonctions de coûts C_{ih} , $\forall \pi_{ih} \in \Pi$, et la fonction d'énergie correspondante Φ , nous proposons de modéliser Φ en fonction de C_{ih} comme montré par l'Equation 2.15.

$$\Phi(x) = \sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} C_{ih}(x^{(C_{ih})}) \tag{2.15}$$

2.5 Séparation-et-Évaluation pour Trouver l'Équilibre de Nash

La recherche de l'EN est un problème NP-difficile [60, 61, 62], malgré que le nombre de variable est réduit pour chaque fonction de coût. L'algorithme de Séparation-et-Évaluation (SE) est connu comme étant une technique efficace pour résoudre des problèmes d'optimisations difficiles [63, 64]. Ce type d'algorithme adopte la méthode d'élimination de stratégies dominées. Les fonctions traitées dans ce chapitre sont convexes. Pour ce type de fonction convexe, nous allons adopter un jeu de type discret. D'où l'obligation de discrétiser le domaine de recherche en transformant le domaine $[0,1]^{n \times l}$ en une grille uniforme selon un pas α que la complexité de l'algorithme de recherche y dépendra. Le domaine de recherche est redéfini par $X(\alpha) = \{0, \alpha, 2\alpha, \dots, (1-\alpha), 1\}^{n \times l}$ avec $\alpha \in \{10^{-t} | t \in \mathbb{N}^*\}$. Plus t augmente plus la précision augmente et la complexité aussi. Puisque le problème comprend un grand nombre de variables, il ne faut pas traiter les joueurs de Π aléatoirement pour plus d'efficacité. La première étape consiste à appliquer la règle de sélection. Cette règle se présente sous la forme de tri des joueurs de Π selon leurs interactions et relations de voisinages par rapport aux contraintes, et par conséquent, construire un ensemble de joueurs triés noté Π' . Les premiers joueurs, qui seront placés à l'entête de Π' , sont les voisins directs des joueurs π_{ih} avec $x_{ih} \in \{0,1\}$. Les joueurs suivants sont les voisins de ces derniers, sans compter ceux qui sont déjà placés dans Π' . Ensuite, il faut refaire cette étape jusqu'à parcourir tous les joueurs de Π . L'algorithme de recherche en largeur pour trier les joueurs de Π dans un graphe G , est présenté par l'Algorithme 2.

L'algorithme de Séparation-et-Évaluation réagit en trois étapes : séparation, sélection et évaluation.

1. Le rôle de la séparation est de déterminer comment l'ensemble $X(\alpha)$ va être divisé en plusieurs sous ensembles. Chaque $X_{ih}(\alpha)$ est divisé en un nombre fini de sous ensembles, que par la suite ils présentent des sous problèmes à traiter. Pour le problème d'optimisation des fonctions d'énergies convexes, nous proposons de diviser l'ensemble de stratégies discret $X_{ih}(\alpha)$ en deux sous ensembles, $X_{ih}^{(G)}(\alpha)$ et $X_{ih}^{(D)}(\alpha)$ avec $|X_{ih}^{(G)}(\alpha)| = |X_{ih}^{(D)}(\alpha)| \pm 1$ tel que $x_{ih}^{(G)} < x_{ih}^{(D)}, \forall x_{ih}^{(G)} \in X_{ih}^{(G)}(\alpha), \forall x_{ih}^{(D)} \in X_{ih}^{(D)}(\alpha)$. D'où, on note $X^{(G)}(\alpha) = X_{ih}^{(G)}(\alpha) \times X_{-(ih)}(\alpha)$ et $X^{(D)}(\alpha) = X_{ih}^{(D)}(\alpha) \times X_{-(ih)}(\alpha)$. Notons par $C_{ih} : X^{(C_{ih})} = X_{ih} \times X_{-(ih)}^{(C_{ih})} \rightarrow \mathbb{R}$, d'où $X^{(C_{ih})} = X_{ih} \times X_{-(ih)}^{(C_{ih})}$ est l'espace de stratégies sur lequel C_{ih} est défini, $\forall \pi_{ih} \in \Pi$. Cette méthode de séparation garde les mêmes chances aux deux sous ensembles d'être choisis, après l'étape d'évaluation.

Algorithme 1 : Recherche en largeur pour trier de joueurs dans un graphe G

Données :

- Un graphe $G(V, E)$, contenant en ensemble de nœuds marqués et un ensemble de nœuds non marqués.
- Un ensemble de marqueurs L utilisés pour distinguer les objets à extraire.
- $x_i = 1$ si le nœud v_i est marqué par le marqueur de fond, $x_i = 0$ si le nœud v_i est marqué par le marqueur de forme et le potentiel x_i est inconnu si le nœud v_i est non marqué.

Résultat :

- Un ensemble de joueurs triés Π' .

- (1) - Créer un ensemble de joueurs vide Π' .
 - (2) - Ajouter chaque joueur $\pi_{ih}, \forall e_{ij} \in E$ tel que $x_{jh} \in \{0, 1\}$.
 - (3) - $k = 0$.
 - (4) - $i = 0$.
 - (5) **tant que** $k < n \times l$ (taille de Π) $i < n$ **faire**
 - (6) **tant que** $\exists e_{ij} \in E$ telle que $\pi_j = (\pi_{j1}, \dots, \pi_{jl}) \notin \Pi', \pi_j \in \Pi$ et $\pi_i \in \Pi'$ **faire**
 - (7) - Ajouter $\pi_j = (\pi_{j1}, \dots, \pi_{jl})$ à la fin de l'ensemble de joueurs triés Π' .
 - **pour chaque** $\pi_{jm} \in \pi_j$ **faire**
 - $\Pi'[k + m] = \pi_{jm}$
 - $i = i + 1$.
 - $k = k + l$.
-

2. La sélection des stratégies permet aux sous ensembles d'être exploités [65]. Pour ce cas d'étude, il faut trouver le potentiel pour chaque nœud non marqué du graphe. Ces potentiels doivent satisfaire l'EN du jeu proposé. Pour cette étape, nous devons choisir deux sous espaces de stratégies réduits $Y^{(G)}$ et $Y^{(D)}$ de $X^{(G)}$ et $X^{(D)}$, respectivement. Pour chaque joueur $\pi_{jg} \in \Pi^{(C_{ih})}$ participant au calcul de C_{ih} , nous devons choisir seulement deux stratégies telles que

$$Y^{(G)} = \times_{\forall X_{jg}^{(G)}(\alpha) \in X^{(G)}(\alpha)} \{\sup(X_{jg}^{(G)}(\alpha)), \inf(X_{jg}^{(G)}(\alpha))\}$$

$$\text{et } Y^{(D)} = \times_{\forall X_{jg}^{(D)}(\alpha) \in X^{(D)}(\alpha)} \{\sup(X_{jg}^{(D)}(\alpha)), \inf(X_{jg}^{(D)}(\alpha))\}.$$

3. L'étape d'évaluation est réalisée en utilisant les fonctions de coûts $C_{ih}(y)$ sur $Y^{(G)}$ et $Y^{(D)}$, séparément. Le problème de la recherche du minimum de la fonction d'énergie Φ est équivalent à la recherche de l'EN en utilisant les fonctions de coûts C_{ih} , avec un nombre de variables réduit par rapport à Φ . Par conséquent, pour chaque profil de stratégies sélectionné y , soit de $Y^{(G)}$ ou de $Y^{(D)}$, la fonction de coût, C_{ih} , est testée dans le but d'extraire le meilleur choix. Finalement, le sous ensemble contenant le meilleur minimiseur x_i , sera sélectionné pour le garder et l'autre sous ensemble sera élagué.

L'algorithme de Séparation-et-Évaluation proposé pour atteindre l'équilibre de Nash,

est présenté par l'Algorithme 3. Cet algorithme prend comme entrées un ensemble de stratégies pour chaque joueur $\pi_i \in \Pi$. Par la suite, il a résolu le problème de minimisation de la fonction d'énergie convexe dans un espace discret, en utilisant des outils de la théorie des graphes [66] et de la théorie des jeux.

Algorithme 2 : Séparation-et-Évaluation pour chercher l'Équilibre de Nash dans un graphe G

Données :

- Un graphe $G(V, E)$, contenant en ensemble de nœuds marqués et un ensemble de nœuds non marqués.
- Un ensemble de marqueurs L utilisé pour distinguer les objets à extraire.
- L'ensemble de stratégies
 $X(\alpha) = X_{11}(\alpha) \times X_{12}(\alpha) \times \dots \times X_{nl}(\alpha) = \{0, \alpha, 2\alpha, \dots, (1 - \alpha), 1\}^{n \times l}$ avec $\alpha \in \{10^{-t} | t \in \mathbb{N}^*\}$.
- $x_{ih} = 1$ si le nœud v_i est marqué par le marqueur h , $x_{ih} = 0$ si le nœud v_i est marqué par le marqueur autre que h et x_{ih} est inconnu si le nœud v_i non marqué.

Résultat :

- Un potentiel x_{ih} pour chaque nœud du graphe G .

(1) **tant que** $\exists X_{ih}(\alpha) \subset X(\alpha)$ avec $|X_{ih}(\alpha)| > 1$ **faire**

// Séparation

- Séparer le sous ensemble $X_i(\alpha)$ en deux sous ensembles

$X_{ih}^{(G)}(\alpha)$ et $X_{ih}^{(D)}(\alpha)$ où $|X_{ih}^{(G)}(\alpha)| = |X_{ih}^{(D)}(\alpha)| \pm 1$ et $x_{ih}^{(G)} < x_{ih}^{(D)}, \forall x_{ih}^{(G)} \in X_{ih}^{(G)}(\alpha), \forall x_{ih}^{(D)} \in X_{ih}^{(D)}(\alpha)$;

- $X^{(G)}(\alpha) = X_{ih}^{(G)}(\alpha) \times X_{-(ih)}^{(G)}(\alpha)$;

- $X^{(D)}(\alpha) = X_{ih}^{(D)}(\alpha) \times X_{-(ih)}^{(D)}(\alpha)$.

// Sélection des stratégies de test

- $Y^{(G)} = \times_{\forall X_{jg}^{(G)}(\alpha) \in X^{(G)}(\alpha)} \{\sup(X_{jg}^{(G)}(\alpha)), \inf(X_{jg}^{(G)}(\alpha))\}$;

- $Y^{(D)} = \times_{\forall X_{jg}^{(D)}(\alpha) \in X^{(D)}(\alpha)} \{\sup(X_{jg}^{(D)}(\alpha)), \inf(X_{jg}^{(D)}(\alpha))\}$.

// Évaluation

- Évaluer $Y^{(G)}$ et chercher : $m^{(G)} = \min_{y \in Y^{(G)}} C_{ih}(y)$;

- Évaluer $Y^{(D)}$ et chercher : $m^{(D)} = \min_{y \in Y^{(D)}} C_{ih}(y)$.

// Mise à jour de l'ensemble de stratégies X_i du nœud v_i

(2) **si** $m^{(G)} < m^{(D)}$ **alors**

| $X_{ih} = X_{ih}^{(G)}$

sinon

| $X_{ih} = X_{ih}^{(D)}$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche pour résoudre le problème de minimisation d'une fonction d'énergie convexe. Ce problème est connu comme

étant un problème combinatoire avec un grand nombre de variables. D'où, nous avons présenté le problème sous forme de jeu stratégique non-coopératif à potentiels exacts discrets, dans le but de chercher l'Équilibre de Nash à partir des fonctions de coûts. Ces derniers relaxent la fonction d'énergie globale et réduisent le nombre de variables pour chaque calcul. L'Équilibre de Nash pour ce genre de jeu, jeu potentiel exact, est considéré comme le minimum global, si la fonction à traiter est strictement convexe. Cette représentation réduit la complexité du problème. Mais la recherche de l'Équilibre de Nash reste un problème NP-difficile. D'où, la nécessité de chercher l'Équilibre de Nash en utilisant un algorithme conçu pour résoudre les problèmes combinatoires. Les algorithmes de Séparation-et-Évaluation sont conçus pour résoudre les problèmes d'optimisation difficiles sur des ensembles discrets.

Dans le chapitre qui suit, nous allons tester ce nouveau modèle pour la segmentation d'image. Une étude qualitative et quantitative est nécessaire pour évaluer ce modèle en comparaison avec des modèles de la même catégorie.

Application du Cadre TES¹ à la Segmentation d'Images

3.1	Introduction	42
3.2	Reformulation des Modèles de Fonctions d'Énergies Convexes . . .	42
3.3	Illustration de l'Approche Proposée	44
3.4	Segmentation d'Image avec Marqueurs par Minimisation de LPEP	46
3.5	Conclusion	48

1. Théorie des Jeux et Evaluation - et - Séparation

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, une application de l'approche proposée est réalisée sur le modèle d'énergie de ligne de partage des eaux puissance (LPEP). Une illustration des résultats est donnée au cours de ce chapitre, ainsi des comparaisons qualitative et quantitative seront présentées par rapport à d'autres modèles de la même famille que le LPEP.

3.2 Reformulation des Modèles de Fonctions d'Énergies Convexes

Une nouvelle formulation de la fonction ligne de partage des eaux puissance (LPEP) [23] est proposée. Cette fonction a été proposée dans [23], mais elle n'est pas généralisée à tous les cas.

3.2.1 Les Fonctions d'Énergies Convexes LPEP

Ce cadre est obtenu en introduisant de nouveaux paramètres dans la fonction d'énergie généralisée proposée dans [24], par la suite le problème a été redéfini dans [23] par l'Equation 3.1.

$$\begin{aligned} \Phi_{LPEP}(x) = & \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q \\ & + \sum_{v_i \in V} w_{F_i}^p |x_i|^q + \sum_{v_i \in V} w_{B_i}^p |x_i - 1|^q, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où w_{F_i} et w_{B_i} sont les poids qui pénalisent les marqueurs de fond et de forme, respectivement, sur le nœud $v_i \in V$. Les différents modèles générés par les différentes valeurs de p et q sont illustrés par la table 3.1. Ce modèle unifié basé sur les graphes, LPEP, étend le modèle proposé dans [24] et inclut le Graph Cut (GC) [54], Marcheur Aléatoire (MA) [17] et les algorithmes d'optimisation par recherche du plus court chemin (MSF) [19]. Le cas où q est fini et $p \rightarrow \infty$ est bien considéré comme un algorithme de plus court chemin de Kruskal avec deux différences ; une forêt est calculée à la place d'une

$p \backslash q$	0	fini	∞
1	Collapse aux marqueurs	Coupes minimales	MSF, LPEP
2	Voronoi Normes ℓ_2	Marcheur Aléatoire	MSF, LPEP $q = 2$
∞	Voronoi Normes ℓ_1	Voronoi Normes ℓ_1	Plus Courts Chemins

TABLE 3.1 – Les modèles générés du LPEP [23] en variant les paramètres p et q .

arbre, et l'optimisation de l'Equation 3.2 est exécutée sur un plateau.

$$\Phi_{CLPEP}(x) = \sum_{e_{ij} \in \text{plateau}} |x_i - x_j|^q \quad (3.2)$$

où le *plateau* est un sous graphe de G contenant l'ensemble des nœuds connectés avec des arêtes ayant les même poids. Pour l'autre cas avec p fini et q fini, la recherche du minimum est bien un problème combinatoire avec un grand nombre de variables, qui peut atteindre l fois le nombre de pixels sur l'image à traiter. D'après la table 3.1, le cas $q > 2$, quelque soit p fini ou tend vers ∞ , n'a pas été abordé. A travers ce travail, une extension de ce modèle est proposée pour les deux cas (q fini et $p \rightarrow \infty$) et (q fini et p fini). Pour le premier cas (q fini et $p \rightarrow \infty$), la minimisation est faite juste après l'exécution de l'algorithme proposé dans [23], à l'étape où on a besoin d'optimiser pour couper le plateau.

Le cadre de fonction LPEP est un modèle composé seulement du terme de régularisation, qui évalue seulement l'interaction entre les pairs de nœuds. La fonction d'énergie LPEP est un cas particulier de l'Equation 2.12 présentée par l'Equation 3.3.

$$\Phi(x) = \sum_{h \in L} \sum_{v_i \in V} \phi^r(x_{ih}, x_{-(ih)}^{\text{(fid)}}), \quad (3.3)$$

Ce modèle traite la cas de deux labels, $|L| = 2$. Nous avons choisi de noter les indices i au lieu de ih . Pour le cas de multi contraintes, objets ou marqueurs ($|L| > 2$), l solutions, $x = \{x_1, \dots, x_l\}$, doivent être calculée itérativement, l'une après l'autre. Chaque $x_l = (x_{1l}, \dots, x_{nl})$ est traité à part comme un problème à deux contraintes en définissant $x_{ih} = 1$ du nœuds v_i satisfaisant la contrainte h , et pour les autres nœuds v_j satisfaisant une contrainte autre que h , $x_{j\bar{h}} = 0$. Dans le contexte de la segmentation, une contrainte signifie un objet, un marqueur ou un potentiel fixe.

3.2.2 LPEP comme Jeu Stratégique non Coopératif à Potentiels Exactes Discrets

Pour modéliser ce problème convexe comme un jeu stratégique potentiel exact non-coopérative à potentiels exacts discrets sur un graphe, nous avons besoin de définir les fonctions de coûts pour les deux cas. En appliquant l'égalité présente par l'Equation 2.13, sur les deux cas du LPEP, on obtient les fonctions de coûts suivantes, Equation 3.4 et Equation 3.5 respectivement pour les cas (q fini et p fini) et (q fini et $p \rightarrow \infty$).

$$\begin{aligned} C_i^{LPEP}(x) &= \sum_{v_j \in \{V | e_{ij} \in E\}} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q \\ &+ \sum_{e_{Fi} \in E} w_{Fi}^p |x_i|^q + \sum_{e_{Bi} \in E} w_{Bi}^p |x_i - 1|^q \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec l'arête e_{Fi} connecte les nœuds appartenant au fond (portant un marqueur de fond) et son voisin v_i , et l'arête e_{Bi} connecte les nœuds appartenant à la forme (portant un marqueur de forme) et son voisin v_i .

$$C_i^{CLPEP}(x) = \sum_{v_j \in \{V | e_{ij} \in \text{plateau}\}} |x_i - x_j|^q \quad (3.5)$$

Ce modèle de fonction est bien strictement convexe [23], d'où le minimum est unique. La fonction potentielle du jeu est bien égale à la fonction d'énergie. Par la suite si l'EN existe, il est unique car il correspond au minimum de cette fonction potentielle [67].

3.3 Illustration de l'Approche Proposée

Pour cette section, un exemple de petit graphe (Figure 3.1 (a)) est présenté pour vérifier l'efficacité de l'algorithme de Séparation-et-Évaluation proposé (Algorithme 3) à atteindre l'EN du jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets pour le modèle de fonction d'énergie LPEP. Les jeux testés sont caractérisés par les fonctions de coûts définis par les Equations 3.4 et 3.5 et par des ensembles discrets $X(\alpha)$. Le but de cette illustration est de voir la différence entre l'approche proposée et la méthode exhaustive en terme de nombre d'itérations pour atteindre l'EN. Pour cet exemple, nous avons choisi un pas de discrétisation $\alpha = 10^{-2}$. Par conséquent, l'ensemble des stratégies $X_i(\alpha), \forall v_i \in V$ est défini par un ensemble de valeur fini $X_i(\alpha) = \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99, 1\}$. D'où chaque joueur π_i possède 101 actions. Pour le cas LPEP (q fini et p fini), modélisé par l'Equation 3.4, l'EN est atteint après 101^7 itérations avec la méthode exhaustive, et 49 itérations en utilisant notre algorithme (Algorithme 3). Aussi pour le cas LPEP (q fini et $p \rightarrow \infty$), modélisé par l'Equation 3.5, il a fallu 103050 itérations avec la méthode exhaustive et 21 seulement avec le même algorithme (Algorithme 3). D'où, nous pouvons constater que l'Algorithme 3 atteint l'EN en un temps très réduit par rapport à la méthode exhaustive classique.

Aussi dans la Figure 3.1, les résultats de segmentation du graphe sont présentés en minimisant la fonction d'énergie pour les deux cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) (Figure 3.1 (b)) et ($1 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$) (Figure 3.1 (c)).

Figure 3.1 (a) représente un graphe avant minimisation de fonction d'énergie. Un exemple de petit graphe 4-connecté avec 9 nœuds ; 7 parmi eux ne sont pas marqués et 2 sont marqués par 1 pour marquer le fond (le nœud x_3 en rouge) et 0 pour marquer la forme (le nœud x_7 bleu). A coté de chaque nœud, une valeur d'intensité est attribuée (colorée en violet). Aussi pour chaque arête, un poids est attribué. Figure 3.1 (b) représente le résultat de segmentation finale du graphe après minimisation de la fonction

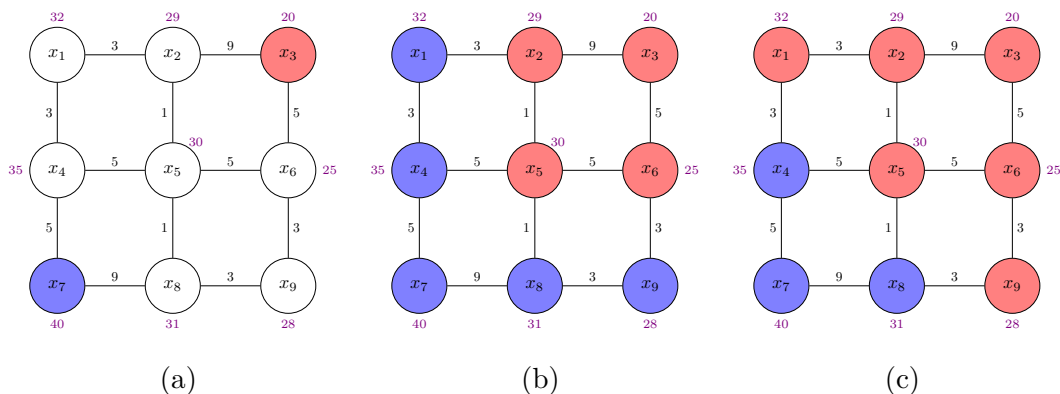


FIGURE 3.1 – Illustration des résultats de segmentation d'un graphe après minimisation du modèle d'énergie LPEP pour les deux cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) (b) et ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) (c).

LPEP cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$). La Figure 3.1(c) représente le résultat de segmentation finale du graphe après minimisation de la fonction LPEP cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) par Algorithme 3 aussi. A partir de ces résultats, qui illustrent aussi ceux de la Table 3.2, nous pouvons constater que les résultats sont différents les uns des autres par rapport au paramètres choisis q et p . Cette remarque est bien prouvée par la Table 3.2 qui illustre les potentiels, $x_i, \forall \pi_i \in \Pi$, des nœuds après minimisation de la fonction d'énergie LPEP par recherche de l'EN dans un jeu stratégique potentiel exacte non-coopératif à potentiels exacts discrets constitué de 9 joueurs (le nombre de nœuds du graphe de la Figure 3.1) en utilisant l'Algorithme 3 pour la recherche de l'EN. Nous avons varié les valeurs de q et p pour les deux cas de LPEP, et cette variation donne des différents résultats pour certains nœuds. Les contraintes du problèmes sont représentées par les nœuds marqués dans la Figure 3.1 et les lignes colorées dans la Table 3.2. Les potentiels des nœuds colorés dans la Figure 3.1 sont désignés par les lignes colorées; la ligne en rouge pour le nœud marqué appartenant au fond, et la ligne en bleu pour le nœud marqué appartenant à la forme. Ces contraintes dures se présentent sous la forme de potentiels fixes x_i pour quelques nœuds $v_i \in V$ du graphe ($x_3 = 1$ et $x_7 = 0$). Les potentiels présents dans cette Table, sont identiques à ceux cherchés par la méthode exhaustive avec le même pas de discrétisation $\alpha = 10^{-2}$. Le temps pris par la méthode exhaustive pour trouver le minimum sera plus important pour un graphe plus large et/ou une valeur de précision α plus petite.

	LPE q et p fini		LPE q et p fini $p \rightarrow \infty$	
	$q = 20$ et $p = 100$	$q = 200$ et $p = 30$	$q = 10$	$q = 600$
x_1	0.25	0.01	1	1
x_2	1	0.5	1	1
x_3	1	1	1	1
x_4	0.25	0	0.25	0.24
x_5	0.51	0.06	0.5	0.51
x_6	0.75	0.53	0.75	0.72
x_7	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0
x_9	0.2	0.5	1	1

TABLE 3.2 – Les valeurs des potentiels x_i que prend chaque nœud $v_i \in V$, de la Figure 3.1 après minimisation de la fonction d'énergie LPEP, pour les deux cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) et ($1 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$) par l'Algorithme 3 pour la recherche de l'EN.

3.4 Segmentation d'Image avec Marqueurs par Minimisation de LPEP

Comme déjà mentionné précédemment, les cas de ($1 < q < \infty$ et $1 < p < \infty$) et ($2 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$) du LPEP ne sont pas exploités pratiquement. Pour résoudre ce problème, nous proposons d'utiliser l'approche proposée et la considérer comme un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets. Nous considérons l'image comme un graphe 4-connecté. L'algorithme proposé, pour minimiser le modèle du LPEP, traite chaque objet séparément. D'où, la minimisation de la fonction est effectuée itérativement. Par conséquent, chaque nœud v_i du graphe G prend un seul joueur π_i indexé par $i \in N$, à chaque itération. Le cas spécial de LPEP ($2 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$) est traité comme un traversé de maximum d'un arbre en utilisant l'algorithme de Kruskal avec deux différences :

1. A la place d'un seul arbre, une forêt est exploitée.
2. le problème d'optimisation Φ_{LPEP} est exécuté sur un plateau au lieu du graphe de l'image toute entière.

Chaque plateau est défini comme un nombre de nœuds maximum connecté avec des arêtes portant le même poids. De plus, l'algorithme proposé par Couprie et al. [23], fusionne le plateau contenant des nœuds non marqués et des nœuds marqués avec un même marqueur, et calcule le x_{LPEP}^* pour les plateaux avec des nœuds non marqués et des nœuds marqués différemment. Pour ce cas spécial, l'algorithme de Séparation-et-

Évaluation (Algorithme 3) est appliqué sur chaque plateau avec des nœuds non marqués et des nœuds marqués différemment. Ici, chaque plateau est traité séparément. Ensuite, si le potentiel $x_i \geq 0.5$, le pixel i sera affecté à l'objet h , et le potentiel sera forcé à $x_i = 1$. Si $x_i < 0.5$, ce potentiel prend la valeur nulle, $x_i = 0$. Ainsi, ce paramètre permet la classification des pixels appartenant au fond, si $x_{ih} = 1$, ou à la forme, si $x_{ih} = 0$, vis-a-vis l'objet marqué h .

Ensuite, nous évoquons une illustration ainsi qu'une discussion de quelques résultats pour le modèle de jeu d'énergie LPEP considérant les deux cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) et ($2 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$). La Figure 3.2 présente les résultats de segmentation en minimisant la fonction LPEP pour le cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) utilisant la théorie des Jeux et l'algorithme de Séparation-et-Évaluation (Algorithme 3), déjà décrit dans le chapitre 2. La Première et la quatrième colonnes représentent les marqueurs utilisés pour la segmentation. La seconde et la cinquième colonnes englobent les formes des objets extraits des images d'entrées. La troisième et la sixième colonnes illustrent les masques des objets extraits. A partir de ces résultats présentés par la deuxième et la quatrième colonnes, nous pouvons notifier que les objets segmentés sont délimités par la ligne en rouge, et les masques de ces objets sont présentés par la troisième et la sixième colonnes. Visuellement, ces résultats sont homogènes et uniques. Ce qui est conforme avec la citation dans [23].

Dans la Figure 3.3, les résultats de segmentation de six images du benchmark Berkeley [68] sont présentés. La première et quatrième colonnes présentent les marqueurs utilisés pour la segmentation. La seconde et la cinquième colonnes englobent les formes des objets extraits des images d'entrées. La troisième et la sixième colonnes illustrent les masques des objets extraits. Ces résultats sont fournis après avoir utilisé la théorie de jeux pour représenter le problème et l'algorithme de Séparation-et-Évaluation (Algorithme 3) pour minimiser la fonction d'énergie LPEP pour le cas ($1 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$), comme pour le cas de ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$). Aussi, la deuxième et la quatrième colonnes présentent les objets extraits délimités par une ligne en rouge, et la troisième et la sixième colonnes montrent les masques de ces objets. Ces résultats montrent que les objets extraits sont homogènes et uniques.

Dans le but d'évaluer quantitativement les résultats de segmentation sur la totalité du benchmark Berkeley, en les comparant avec ceux donnés par MSF (Prim et Kruskal) et LPEP avec $q = 2$, une étude statistique est réalisée. Pour cette évaluation, nous avons évalué 21 métriques proposées par [69, 70]. La Table 3.3 résume 8 métriques, que nous avons choisies : Coefficient de Dice [71], Corrélation Interclasse [72], Coefficient de

Similarité Volumique [73, 74, 75, 76], Erreur Globale de Cohérence [77], Distance Probabiliste [78], Sensibilité (Taux Vrai Positif) [79], F-Mesure [80] et Distance Moyenne de Hausdorff [81]. Un bon résultat de segmentation est associé avec un Coefficient de Dice élevé (proche de 1), une Corrélacion Interclasse élevée (proche de 1), un Coefficient de Similarité Volumique élevé (proche de 1), une Erreur de Cohérence basse (proche de 0), une Distance Probabiliste basse (proche de 0), une Sensibilité élevée (proche de 1), une F-Mesure élevée (proche de 1) et une Distance Moyenne de Hausdorff basse (proche de 0). Dans la Table 3.3, nous avons calculé la moyenne, la médiane, la déviation standard (std), la meilleure valeur et la moindre valeur pour chaque métrique.

Selon les boites à moustaches illustrant ces métriques (Figure 3.4), nous pouvons confirmer que notre approche, appliquée sur LPEP ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) et ($1 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$), donne des résultats de même rang que ceux des autres méthodes (LPEP $q = 2$, MSF Prim et MSF Kruskal), même meilleurs que ces derniers. Les résultats de segmentation donnés par le cas du LPEP ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) sont bien meilleurs selon ces statistiques, par rapport aux autres cas appartenant au même framework.

Comparant les résultats des cas de la fonction d'énergie LPEP manipulés dans ce travail, nous pouvons noter que pour les objets avec une forme géométrique convexe, le cas ($1 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$) donne de meilleurs résultats par rapport à ceux donnés par le cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$). Inversement pour les objets avec une forme géométrique concave, il est meilleur de procéder avec le cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$).

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discuté la fiabilité de l'approche proposée dans le chapitre 2 sur un petit exemple de graphe. La fonction d'énergie exploitée, pour ce but, est la LPEP pour les deux cas ($1 < q < \infty$ et $0 < p < \infty$) et ($1 < q < \infty$ et $p \rightarrow \infty$). Pour se faire, nous avons comparé les résultats donnés avec ceux de la méthode exhaustive classique. Par la suite, nous avons exposé quelques résultats de segmentations d'image sur le benchmark Berkeley. Et concernant la critique qualitative et quantitative, nous avons présenté des boites à moustaches et des résultats numériques, comparant notre approche et d'autres appartenant au même modèle. Ces tests montrent la fiabilité de notre approche en segmentation d'image par minimisation de fonction d'énergie convexe.

Dans le chapitre qui suit, nous allons aborder le problème de minimisation des



FIGURE 3.2 – Résultats de segmentations de quelques images du benchmark Berkeley en minimisant la fonction d'énergie LPEP (cas q fini et p fini).

fonctions d'énergies monotones, non-convexes, en traitant le problème sur des espaces métriques compacts. De même, nous allons utiliser la théorie des jeux, mais continus. Concernant l'algorithme de recherche de l'Équilibre de Nash sera un algorithme de recherche par division d'intervalles.

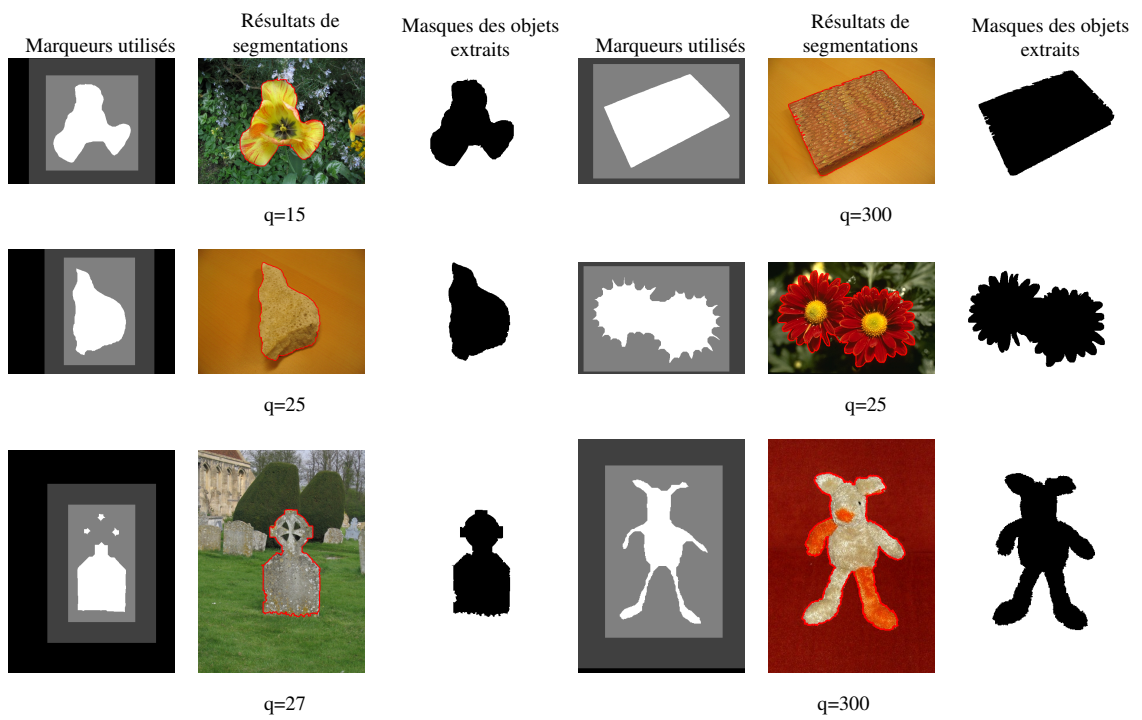


FIGURE 3.3 – Résultats de segmentations de quelques images du benchmark Berkeley en minimisant la fonction d'énergie LPEP (cas q fini et $p \rightarrow \infty$).

		MSF Kruskal	LPE $q = 2$	MSF Prim	Jeu LPE q fini $p \rightarrow \infty$	Jeu LPE q et p fini
Coefficient de Dice	Moyenne	0.991663	0.991949	0.991668	0.991877	0.994117
	Médian	0.992028	0.992462	0.992057	0.992312	0.995335
	Std	0.0035191	0.003334	0.003526	0.003282	0.002956
	Meilleur	0.998138	0.998031	0.998131	0.998031	0.998544
	Moindre	0.978869	0.981060	0.978963	0.980576	0.983362
Corrélation Interclasse	Moyenne	0.991598	0.991887	0.991604	0.991814	0.994071
	Médian	0.991966	0.992403	0.991994	0.992252	0.995299
	Std	0.003546	0.003359	0.003553	0.003307	0.002979
	Meilleur	0.998123	0.998015	0.998117	0.998015	0.998533
	Moindre	0.978707	0.980915	0.978802	0.980428	0.983234
Coefficient de Similarité Volumique	Moyenne	0.996235	0.996415	0.996241	0.996365	0.998076
	Médian	0.996364	0.996522	0.996344	0.996496	0.997957
	Std	0.001753	0.001664	0.001745	0.001674	0.001025
	Meilleur	0.999344	0.999277	0.999344	0.999277	0.999866
	Moindre	0.992057	0.992451	0.992017	0.992434	0.995359
Erreur de Globale de Cohérence	Moyenne	0.024667	0.023998	0.024653	0.024174	0.018844
	Médian	0.023273	0.023119	0.023232	0.023186	0.015097
	Std	0.009946	0.009542	0.009962	0.009404	0.009312
	Meilleur	0.005923	0.006249	0.005940	0.006249	0.004691
	Moindre	0.060908	0.056201	0.060707	0.057171	0.052620
Distance Probabiliste	Moyenne	3.3 e-5	3.2 e-5	3.3 e-5	3.2 e-5	2.3 e-5
	Médian	3.2 e-5	3 e-5	3.2 e-5	3.1 e-5	1.8 e-5
	Std	1.4 e-5	1.3 e-5	1.4 e-5	1.3 e-5	1.2 e-5
	Meilleur	0.7 e-5	0.8 e-5	0.7 e-5	0.8 e-5	0.6 e-5
	Moindre	8.5 e-5	7.6 e-5	8.4 e-5	7.8 e-5	6.6 e-5
Sensibilité (Taux Vrai Positive)	Moyenne	0.987983	0.988446	0.987994	0.988325	0.992432
	Médian	0.988507	0.988830	0.988522	0.988609	0.993405
	Std	0.005001	0.004700	0.005000	0.004665	0.003369
	Meilleur	0.996839	0.996735	0.996826	0.996735	0.997571
	Moindre	0.971642	0.975318	0.971801	0.974318	0.982437
F-measure	Moyenne	0.991663	0.991949	0.991668	0.991877	0.994117
	Médian	0.992028	0.992462	0.992057	0.992312	0.995335
	Std	0.003519	0.003334	0.003526	0.003282	0.002956
	Meilleur	0.998138	0.998031	0.998131	0.998031	0.998544
	Moindre	0.978869	0.981060	0.978963	0.980576	0.983362
Distance Moyenne de Hausdorff	Moyenne	0.010113	0.009723	0.010106	0.009816	0.006580
	Médian	0.009364	0.009042	0.009348	0.009340	0.005305
	Std	0.004352	0.004087	0.004359	0.004027	0.003342
	Meilleur	0.002181	0.002316	0.002196	0.002316	0.001575
	Moindre	0.025795	0.022605	0.025680	0.023405	0.018937

Les meilleurs résultats pour chaque métrique sont en gras.

TABLE 3.3 – Quelques comparaisons quantitatives par des métriques évaluant les segmentations par minimisation de LPEP sur le benchmark Berkeley.

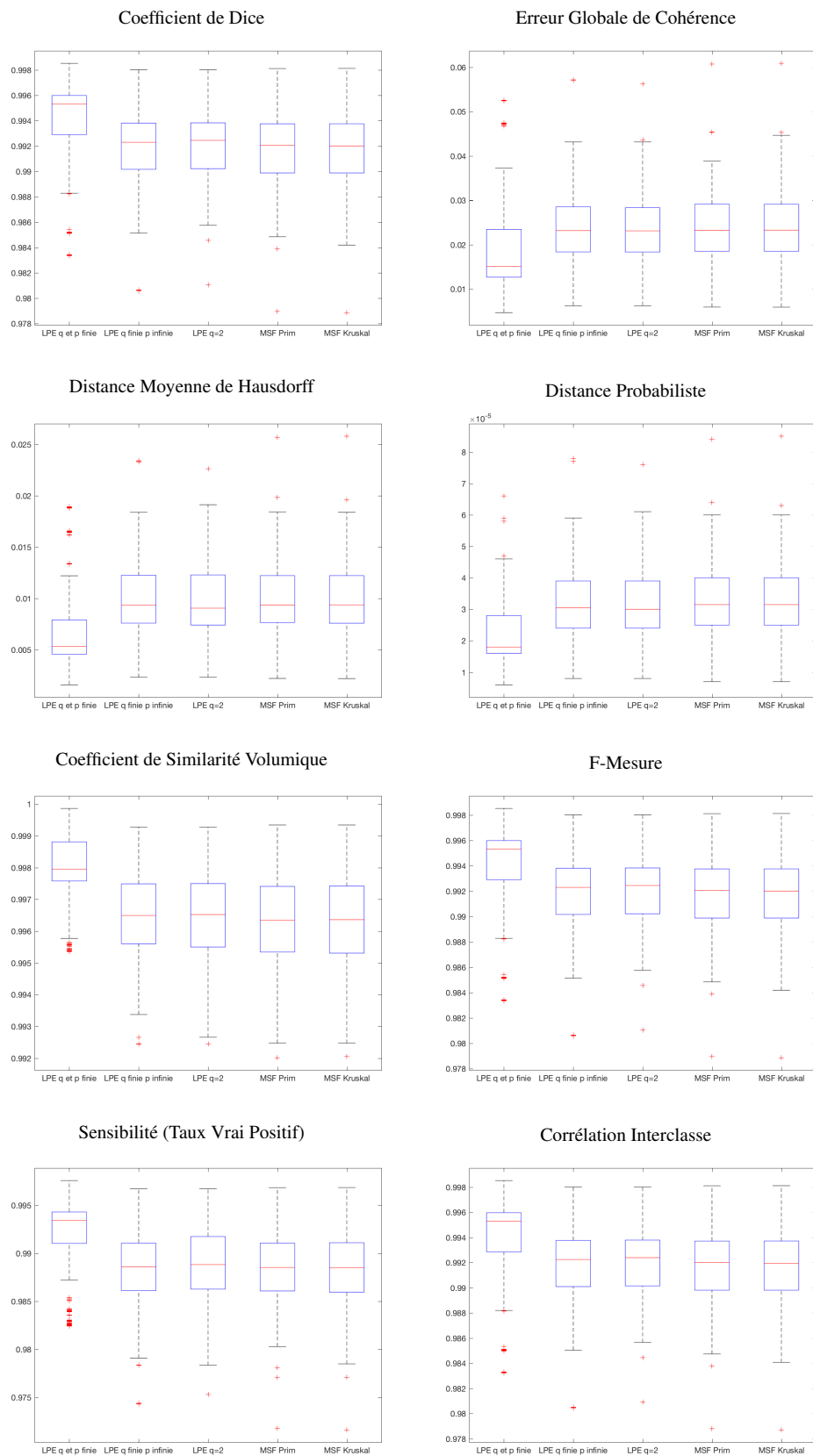


FIGURE 3.4 – Boîtes à moustaches évaluant les métriques de Table 3.3.

Développement d'un Cadre Général basé sur l'Optimisation Continue par Intervalle et Théorie des Jeux

4.1	Introduction	54
4.2	Division d'Intervalles pour Minimisation des Fonctions Monotones	54
4.3	Recherche d'EN Continu	58
4.4	Stabilité et Convergence	60
4.5	Conclusion	61

4.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, nous allons reformuler des modèles de fonctions d'énergies non-convexes par un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts et continus. Une fonction non-convexe admet un optimum global ainsi que des optimaux locaux. Ce type de fonction pose problème lorsqu'il s'agit de les minimiser sur des grandes dimensions en utilisant des méthodes d'optimisation discrete. Cependant, il est nécessaire d'utiliser des approches non exhaustives.

Un jeu $\Omega = (\Pi, X, C)$ est dit continu si $(X_i)_{\pi_i \in \Pi}$ est un ensemble métrique compact et si toute fonction de coût $(C_i)_{\pi_i \in \Pi}$ est continue sur X_i . Comme les problèmes d'optimisation sont définis sur des intervalles continus, nous allons chercher l'EN continu par l'algorithme de division des intervalles d'un espace métrique compact. En d'autres termes, le choix de l'optimum se fait après avoir réduit les intervalles de recherche pour chaque variable de décision du problème d'optimisation. De plus, nous allons présenter une étude de convergence de notre approche de minimisation des fonctions monotones par division d'intervalles sur des ensembles métriques compacts.

4.2 Division d'Intervalles pour Minimisation des Fonctions Monotones

Nous allons définir quelques expressions arithmétiques et leurs évaluations sur des intervalles et décrire quelques caractéristiques de l'arithmétique des intervalles [82, 83, 84] sera présentée. Nous commençons par introduire quelques notations pour les vecteurs d'intervalles :

- \mathbb{R}^n dénote l'espace vectoriel avec n variables réelles.
- \mathbb{IR}^n dénote l'ensemble de vecteurs d'intervalles $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ avec n composantes $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{IR}$.
- $X \in \mathbb{IR}^n$ est interprété comme étant l'ensemble de tous les vecteurs $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\tilde{X}_i \in X_i \forall i = 1, \dots, n$.

Nous utilisons les relations de comparaison et d'inclusion w dans l'ensemble $\{<, \leq, >, \geq, \subseteq, \supseteq\}$ pour $X, Y \in \mathbb{IR}^n$ comme noté par l'Equation 4.1.

$$XwY :\Leftrightarrow X_iwY_i \forall i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Pour définir la similarité, l'infimum, le supremum, le *midpoint* (point médiane), le *radius*, la valeur absolue, l'arrondi vers l'extérieur (*outward rounding*), on prend comme référence [83], et ils sont présentés par la Définition 4.2.1.

Définition 4.2.1.

$$\bar{X} \equiv \text{sup}(X) := (\bar{X}_{11}, \dots, \bar{X}_{nl})^T,$$

$$\underline{X} \equiv \text{inf}(X) := (\underline{X}_{11}, \dots, \underline{X}_{nl})^T,$$

$$\check{X} \equiv \text{mid}(X) := (\check{X}_{11}, \dots, \check{X}_{nl})^T, \text{ avec } \check{X}_{ih} = \frac{\bar{X}_{ih} + \underline{X}_{ih}}{2}, \forall i = \{1, \dots, n\}, \forall h = \{1, \dots, l\}$$

$$\text{rad}(X) := (\text{rad}(X_{11}), \dots, \text{rad}(X_{nl}))^T, \text{ avec } \text{rad}(X_{ih}) = \frac{\bar{X}_{ih} - \underline{X}_{ih}}{2}, \forall i = \{1, \dots, n\}, \forall h = \{1, \dots, l\}$$

$$|X| := (|X_{11}|, \dots, |X_{nl}|)^T, \forall i = \{1, \dots, n\}, \forall h = \{1, \dots, l\},$$

$$\diamond X := (\diamond X_{11}, \dots, \diamond X_{nl})^T, \text{ avec } \diamond X_{ih} = [\nabla \bar{X}_{ih}, \Delta \underline{X}_{ih}], \forall i = \{1, \dots, n\}, \forall h = \{1, \dots, l\}.$$

□

avec $\nabla x_{ih}, \Delta x_{ih}$ les arrondis optimaux du réel $x_{ih} \in X_{ih}$. En particulier nous avons besoin aussi des notions présentées par la Définition 4.2.2

Définition 4.2.2.

$$X = \{x \in X \mid \bar{X} \leq x \leq \underline{X}\},$$

$$x \in X \Leftrightarrow |x - \check{X}| \leq \text{rad}(X)$$

□

Les vertices d'une boîte $X \in \mathbb{IR}$ constituent un vecteur de l'ensemble $\text{vert}(X) := \{x \in \mathbb{IR}^{n \times l} \mid x_{ih} \in \{\bar{X}_{ih}, \underline{X}_{ih}\}, \forall i = 1, \dots, n, \forall h = 1, \dots, l\}$.

4.2.1 Distance et Topologie

La distance d'un intervalle est bien une des caractéristiques importantes des intervalles.

Définition 4.2.3. Soit X un ensemble, et supposons qu'une fonction réelle d est définie telle que pour chaque deux éléments $x, y \in X$ les déclarations suivantes sont valables.

$$d(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y \text{ (symétrie),}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \text{ (séparation),}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall z \in X \text{ (inégalité triangulaire).}$$

□

La fonction d est appelée un métrique sur X , et X est connu comme un espace métrique.

Afin de discuter la continuité et la convergence dans le contexte d'analyse des intervalles, on exige un métrique adapté. Pour cela, une définition de distance entre intervalles est nécessaire.

Proposition 4.2.1.

Pour définir les distances entre les intervalles, [83] propose l'égalité suivante.

$$d(X,Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\bar{X} - \bar{Y}|\}$$

comme une mesure de distance entre deux intervalles $X = [\underline{X}, \bar{X}]$ et $Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$.

Lemme 4.2.2.

Pour deux vecteurs d'intervalles $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, nous pouvons définir ce que nous pouvons appeler métrique de Hausdorff [83].

$$d_H(X,Y) = \max_i \max\{|\underline{X}_i - \underline{Y}_i|, |\bar{X}_i - \bar{Y}_i|\}$$

4.2.2 Convergence et Continuité sur des Intervalles

Pour étudier la convergence des fonctions arithmétiques sur des intervalles, nous devons exploiter la limite de cette fonction ou cette suite arithmétique, si elle converge vers un intervalle X^* . Soit $X^{(k)}$ une séquence d'intervalles ou ce qu'on appelle une suite d'intervalles. Nous pouvons dire que $X^{(k)}$ est convergente s'il existe un intervalle X^* tel que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un nombre naturel $M = M(\epsilon)$ tel que $d(X^{(k)}, X^*) < \epsilon$ pour tout $k > M$ [83]. De plus, cette définition est valable pour les vecteurs d'intervalles en utilisant la métrique de Hausdorff d_H .

Définition 4.2.4. Dans le cas des séquences réelles, nous pouvons écrire :

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} \text{ or } X^{(k)} \longrightarrow X^*$$

et faire référence à X^* comme la limite de $X^{(k)}$. □

Il n'est pas difficile de montrer que les opérations arithmétiques d'intervalles et les fonctions d'intervalles rationnels sont continues si aucune division par un intervalle contenant un zéro ne s'est produite [83].

L'approche proposée, est basée sur la réduction de la largeur des intervalles de recherche pour chaque variable. Par conséquent, la séquence d'intervalles pour chaque variable est bien une séquence d'intervalles imbriqués (Définition 4.2.5).

Définition 4.2.5. (*Intervalles Imbriqués*)

Une séquence d'intervalles $X^{(k)}$ est imbriquée si $X^{(k+1)} \subseteq X^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Lemme 4.2.3.

Toute séquence imbriquée $X^{(k)}$ converge et a une limite $\bigcap_{k=1}^{\infty} X^{(k)}$.

4.2.3 Critère d'Arrêt

Vu que le critère d'arrêt présenté par la Définition 4.2.4 est une notation théorique puisque la solution X^* est inconnue, un critère d'arrêt doit être défini. Pour toute méthode itérative d'intervalle produisant une séquence imbriquée, $X^{(k)}$, avec des bornes supérieurs et inférieurs, $\underline{X}^{(k)}, \bar{X}^{(k)}$. De plus, nous sommes contraints de respecter une précision fixée par la machine, donc nous avons un critère d'arrêt. Ce critère d'arrêt peut prendre une des formes suivantes (Définition 4.2.6 et Définition 4.2.7).

Définition 4.2.6. Tant que la séquence $X^{(k)}$ converge après un nombre fini d'itérations, nous pouvons obtenir $X^{(k)}$ tant que

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}$$

□

Définition 4.2.7. Si $X^{(k)}$ est généré par une procédure de la forme

$$X^{(k+1)} = F(X^{(k)})$$

tel que chaque $X^{(k+1)}$ dépend seulement de son précédent $X^{(k)}$.

□

la Définition 4.2.6 est un cas spécifique de la Définition 4.2.7.

4.2.4 Monotonie des Fonctions sur \mathbb{IX}

L'extension par monotonie est particulièrement utile quand une fonction f est monotone par rapport à une variable x dans une boîte bornée \mathbb{IX} . Ce qui est le cas si l'évaluation de la dérivée partielle de f par rapport à x est positive (ou négative) en tout point de \mathbb{IX} . Pour la suite, nous disons que x est monotone, d'où la nécessité d'étendre la notion de monotonie sur un ensemble de vecteurs d'intervalles \mathbb{IX} (La Définition 4.2.8) [83].

Définition 4.2.8. (Extension d'une fonction sur $X \in \mathbb{IX}$)

Soit une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. $[f] : \mathbb{IX} \rightarrow \mathbb{IR}$ est une extension de f aux intervalles si :

$$\forall x \in \mathbb{IX} [f](X) \supseteq f(x), x \in X$$

$$\forall x \in \mathbb{X} f(x) = [f](x)$$

□

Pour plus de détail sur la monotonie des fonctions multi-variables le lecteur est invité à voir [85]. Pour ce type de fonctions la monotonie globale est vérifiée variable par variable sur \mathbb{IX} (Définition 4.2.9).

Définition 4.2.9. (Monotonie globale $\mathbb{IX} \subseteq \mathbb{IR}$)

Soit une fonction multi-variables $f : \mathbb{IX} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite globalement monotone, si $\forall i$, $\exists s_i \in \{-1, 1\}$, $\forall \epsilon > 0$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{IX}$ tel que :

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + s_i \epsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

où s_i représente le signe de dépendance de monotonie : $s_i = 1$ (respectivement $s_i = -1$) quand f est décroissante (respectivement croissante) en même direction que la $i^{\text{ème}}$ composante x_i sur X_i . □

Concernant l'approche proposée, il est nécessaire que la fonction à optimiser soit continue et globalement monotone (croissante ou décroissante). Une explication sera détaillée dans la partie discussion de la convergence vers l'EN (Paragraphe 4.4) de notre méthode.

4.3 Recherche d'EN Continu

L'algorithme proposé dans ce paragraphe (Algorithme 4) est capable d'atteindre l'EN d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts continus pour des fonctions d'énergies non-convexes monotones définies sur des espaces métriques compacts. La technique de réduction d'intervalles [86] est connu comme étant une méthode efficace pour la recherche de l'optimum d'une fonction. Cependant, sa complexité est exponentielle en fonction du nombre de variables du problème à traiter. Plus précisément, si le nombre de variables augmente cette méthode converge de plus en plus lentement. Pour notre cas, le nombre de variables est réduit puisque les fonctions de coûts C_{ih} utilisées pour les calculs au sein de l'algorithme sont réduites par rapport aux fonctions d'énergies globales. Chaque fonction de coût C_{ih} fait appel au maximum $9 \times l$ variables (puisque le graphe utilisé est 8-connecté, le coût a besoin du vecteur des variables $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il})$ et ceux de ses 8 voisins directs). Par la suite, la complexité et le temps d'exécution sont réduits pour calculer les fonctions de coûts à chaque itération.

L'algorithme de division d'intervalles proposé pour atteindre l'EN continu est présenté par l'Algorithme 4. Cet algorithme prend comme argument un sous ensemble

métrique compact, un intervalle fermé borné pour chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$. Cet algorithme réagit en deux étapes : division d'intervalles et évaluation des nouveaux sous espaces métriques compacts. Mais l'étape de sélection est effectuée par l'Algorithme 2.

1. Le rôle de cette étape de division d'intervalles est de réduire l'intervalle de recherche sur lequel est défini le potentiel x_{ih} du joueur π_{ih} , qui est en cours de manipulation par l'itération courante. L'intervalle de ce joueur π_{ih} est divisé en deux intervalles, $X_{ih}^{(G)}$ et $X_{ih}^{(D)}$ avec $X_{ih}^{(G)} = [\underline{X}_{ih}, \check{X}_{ih}]$ et $X_{ih}^{(D)} = [\check{X}_{ih}, \bar{X}_{ih}]$. Notons par $C_{ih} : X^{(C_{ih})} = X_{ih} \times X_{-(ih)}^{(C_{ih})} \rightarrow \mathbb{R}$, d'où : $X^{(C_{ih})} = X_{ih} \times X_{-(ih)}^{(C_{ih})}$ est l'espace métrique compact sur lequel C_{ih} est défini, $\forall \pi_{ih} \in \Pi$. Et par la suite, nous pouvons définir les deux sous espaces métriques $X^{(G)} = X_{ih}^{(G)} \times X_{-(ih)}^{(C_{ih})}$ et $X^{(D)} = X_{ih}^{(D)} \times X_{-(ih)}^{(C_{ih})}$, afin de les évaluer par la fonction de coût C_{ih} .
2. Afin d'exploiter et évaluer les nouveaux sous espaces métriques $X^{(G)}$ et $X^{(D)}$, nous proposons d'exploiter les bornes de chaque intervalle constituant ces espaces puisque les modèles de fonctions d'énergies Φ sont monotones sur l'espace de recherche $[0,1]^{n \times l}$ et par la suite toute fonction de coût C_{ih} est monotone aussi, puisque notre jeu est de type potentiel exact [47]. D'où, nous allons profiter de cette monotonie, et tester les C_{ih} sur les bornes de $X^{(G)}$ et $X^{(D)}$. Par la suite, $Y^{(G)} = \times_{\forall X_{jg}^{(G)} \in X^{(G)}} \{X_{jg}^{(G)}, \bar{X}_{jg}^{(G)}\}$ et $Y^{(D)} = \times_{\forall X_{jg}^{(D)} \in X^{(D)}} \{X_{jg}^{(D)}, \bar{X}_{jg}^{(D)}\}$, deux ensembles de stratégies sont construits à partir de $X^{(G)}$ et $X^{(D)}$ respectivement. Pour chaque profile de stratégies sélectionné y , soit de $Y^{(G)}$ ou de $Y^{(D)}$, la fonction de coût C_{ih} est testée dans le but d'extraire le meilleur choix. Finalement, le sous ensemble contenant ce meilleur choix est sélectionné pour garder l'intervalle contenant le meilleur minimiseur x_{ih} de C_{ih} et élaguer l'autre, jusqu'à où un des critères d'arrêt soit satisfait pour chaque intervalle.

Critère de choix de l'intervalle La sélection de l'intervalle à garder à chaque itération est réalisée en deux étapes consécutives. Si la première ne permet pas de décider, l'algorithme teste la deuxième. En premier lieu, l'algorithme vérifie lequel des deux intervalles qui contient la meilleure solution, $m^{(G)}$ ou $m^{(D)}$, et il garde celui qui enferme le minimum des deux. $m^{(G)}$ ou $m^{(D)}$ sont déterminées par la recherche exhaustive classique sur $Y^{(G)}$ et $Y^{(D)}$ respectivement. Par la suite, si l'algorithme n'arrive pas à décider, il procède à la vérification de changement de signe des gradients $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}$ sur $X_{ih}^{(G)}$ et $X_{ih}^{(D)}$ en fixant les $x_{-(ih)}$. Le calcul de $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}$ est effectué par différences finies. Ce choix de calcul de signe de $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}$ est argumenté par le fait que à l'optimum d'une fonction monotone, son gradient s'annule. D'où, si sur un intervalle $X_{ih}^{(G)}$, $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}$ change de signe et sur $X_{ih}^{(D)}$ ne le fait pas, alors il est plus probable que l'optimum soit bien présent sur $X_{ih}^{(G)}$ que

sur $X_{ih}^{(D)}$, et vice versa. De plus, si avec ce deuxième critère aussi l'algorithme n'y arrive pas à décider, c'est que la fonction d'énergie à minimiser devient suffisamment lisse sur X_{ih} , avant division de l'itération courante. Par conséquent, l'étape de retour sur trace prend place, et X_{ih} n'est plus divisé et sera retiré de l'ensembles des intervalles X et placé dans X_S .

4.4 Stabilité et Convergence

Les problèmes d'optimisation traités Φ sont des fonctions d'énergies globalement monotones non-convexes. D'habitude, les fonctions non-convexes sont minimisées seulement localement, au voisinage d'une approximation initiale. La stabilité de l'EN peut aussi être obtenue localement. Notre algorithme (Algorithme 4) enchaîne en se basant sur l'élimination des stratégies dominées (Définition 4.4.1 [87]) de façon successive. Ensuite, la stabilité de l'EN est garantie puisqu'il existe un voisinage rectangulaire à l'équilibre, tel que la restriction du jeu à ce voisinage qui est un jeu à dominance solvable [87]. Un jeu est dit jeu à dominance solvable quand la séquence $(X_{11}^k, \dots, X_{nl}^k)$ converge avec k , dans le sens que le diamètre de X_{ih}^k converge vers zéro pour chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$ quand k tend vers l'infini. En d'autres termes, si k tend vers l'infini, l'algorithme explorera tout l'espace de recherche X . L'intervalle initial de chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$ non marqué est égal à $[0, 1]$.

Définition 4.4.1. Élimination de stratégies dominées

Pour chaque période k et chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$, X_{ih}^{k+1} est déterminé par :

$$X_{ih}^{k+1} = \{x_{ih} \in X_{ih}^k \mid \nexists y_{ih} \in X_{ih}^k, \forall x_{-(ih)} \in X_{-(ih)}^k, C_{ih}(y_{ih}, x_{-(ih)}) < C_{ih}(x_{ih}, x_{-(ih)})\} \quad (4.2)$$

avec $X_{ih}^0 = X_{ih}$ et $X_{ih} = X_{ih}^0 \supset X_{ih}^1 \supset \dots \supset X_{ih}^k \supset X_{ih}^{k+1} \supset \dots$ □

La monotonie est une caractéristique qui nous permet d'éliminer des stratégies dominées d'un intervalle X_{ih} sans directement les évaluer, tout en respectant le principe de l'élimination des stratégies dominées (Définition 4.4.1) et la stabilité de l'EN recherché. Une des propriétés importantes des fonctions globalement monotones sur X est que l'optimum local est atteint au vecteur $x^* \in X$ quand $\nabla\Phi(x^*) = 0_X$ (avec $\nabla\Phi$ est le gradient de Φ). De plus, comme nous avons $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}} = \frac{\partial \Phi_{ih}}{\partial x_{ih}}$, $\forall \pi_{ih} \in \Pi$, donc la recherche $\nabla\Phi(x^*) = 0_X$ est équivalente à la recherche de $\nabla C_{ih}(x^*) = 0_X$, $\forall \pi_{ih} \in \Pi$ (minimisation de C_{ih}) par réduction d'intervalle successive ou itérative, joueur par joueur.

En d'autres termes, le problème peut être formulé sous la forme suivante : soit $X = (X_{11}, \dots, X_{nl})^T$ et $X^k = (X_{11}^{(k)}, \dots, X_{nl}^{(k)})^T$ une séquence générée par une suite dans

un espace ultramétrique. Cette séquence est imbriquée d'où $X_{ih}^{(k+1)} \subseteq X_{ih}^{(k)}, \forall i = 1, \dots, n$ et $\forall h = 1, \dots, l$. Elle est obtenue en appliquant l'Equation 4.2.9.

$$X_{ih}^{(k+1)} = \begin{cases} [\underline{X}_{ih}^{(k)}, \check{X}_{ih}^{(k)}] & \text{si } \arg \min_{x^{(C_{ih})} \in X^{(C_{ih})}} C_{ih}(x_{ih}, x_{-(ih)}) \in Y^{(G)} \\ [\check{X}_{ih}^{(k)}, \bar{X}_{ih}^{(k)}] & \text{si } \arg \min_{x^{(C_{ih})} \in X^{(C_{ih})}} C_{ih}(x_{ih}, x_{-(ih)}) \in Y^{(D)} \\ [\underline{X}_{ih}^{(k)}, \check{X}_{ih}^{(k)}] & \text{si } \frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}} \text{ change de signe sur } [\underline{X}_{ih}^{(k)}, \check{X}_{ih}^{(k)}] \text{ et pas sur } [\check{X}_{ih}^{(k)}, \bar{X}_{ih}^{(k)}] \\ [\check{X}_{ih}^{(k)}, \bar{X}_{ih}^{(k)}] & \text{si } \frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}} \text{ change de signe sur } [\check{X}_{ih}^{(k)}, \bar{X}_{ih}^{(k)}] \text{ et pas sur } [\underline{X}_{ih}^{(k)}, \check{X}_{ih}^{(k)}] \\ X_{ih}^{(k)} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.3)$$

Si $\arg \min_{x^{(C_{ih})} \in X^{(C_{ih})}} C_{ih}(x_{ih}, x_{-(ih)}) \in Y^{(G)}$, on est sûr que le minimiseur x_{ih}^* du joueur π_{ih} appartient à l'intervalle $[\underline{X}_{ih}^{(k)}, \check{X}_{ih}^{(k)}]$, et si $\arg \min_{x^{(C_{ih})} \in X^{(C_{ih})}} C_{ih}(x_{ih}, x_{-(ih)}) \in Y^{(D)}$, ce minimiseur x_{ih}^* appartient à l'intervalle $[\check{X}_{ih}^{(k)}, \bar{X}_{ih}^{(k)}]$. Puisque cette séquence d'intervalle est une séquence imbriquée, donc elle est convergente vers un seul réel $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_{ih}^{(k)} = x_{ih}$ avec $x_{ih} \in \mathbb{R}$ qui sera déterminé par notre algorithme de division d'intervalles (Algorithme 4). Pour ne pas traiter cette séquence imbriquée jusqu'à l'infini, pour une précision élevée, le critère d'arrêt naturel est bien utile.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présent une nouvelle approche pour résoudre le problème de minimisation d'une fonction d'énergie Φ non-convexe sous la condition que la fonction soit continue et globalement monotone sur le domaine de recherche X qui est un espace métrique compact. Concernant la reformulation du problème, nous avons présenté le problème sous forme de jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts continus. Ensuite, nous avons cherché l'Équilibre de Nash dans l'espace continu qui est un problème NP-complet. Il a fallu opter une méthode de recherche qui garantit la stabilité et la convergence vers cet équilibre. L'algorithme proposé dans ce chapitre est conçu pour l'élimination des stratégies dominées par division d'intervalles. Cet algorithme est bien efficace quand la fonction d'énergie est globalement monotone qui permet d'éliminer des stratégies dominées d'un intervalle sans les évaluer.

Dans le chapitre qui suit, nous allons tester ce nouveau modèle pour la segmentation d'image. Ce chapitre comportera aussi une étude qualitative et quantitative pour évaluer ce modèle en comparaison avec des modèles de la littérature.

Algorithme 3 : Algorithme de Division d'Intervalles pour la recherche de l'Équilibre de Nash Continu dans un graphe G

Données :

- Un graphe $G(V, E)$, contenant en ensemble de nœuds marqués et un ensemble de nœuds non marqués.
- Un ensemble de marqueurs L utilisé pour distinguer les objets à extraire.
- Un diamètre d'intervalle $\alpha \in]0, 1]$.
- L'ensemble de stratégies $X = X_{11} \times X_{12} \times \dots \times X_{nl} = [0, 1]^{n \times l}$.
- $x_{ih} = 1$ si le nœud v_i est marqué par le marqueur h , $x_{ih} = 0$ si le nœud v_i est marqué par un marqueur autre que celui du marqueur h et le potentiel x_{ih} est inconnu si le nœud v_i non marqué.

Résultat :

- Un ensemble metrique compact $X_S = \times_{\forall \pi_{ih} \in \Pi} X_{ih}$ avec X_{ih} un intervalle pour chaque joueur $\pi_{ih} \in \Pi$, tel que $\bar{X}_{ih} - X_{ih} > \alpha$ ou C_{ih} est lisse sur X_{ih} .

// Initialisation

(1) $\forall X_{ih} \subset X, \underline{X}_{ih} = 0$ et $\bar{X}_{ih} = 1$.

(2) $X_S = \emptyset$.

(3) **tant que** $\exists X_{ih} \subset X$ avec $X_{ih} \in [X_{ih}, \bar{X}_{ih}]$ et $\bar{X}_{ih} - X_{ih} > \alpha$ **faire**

// Division de l'Intervalle X_{ih}

— Diviser l'intervalle X_{ih} en deux intervalles X_{ih}^G et X_{ih}^D où $X_{ih}^G = [X_{ih}, \check{X}_{ih}]$ et $X_{ih}^D = [\check{X}_{ih}, \bar{X}_{ih}]$;

— $X^G = X_{ih}^G \times X_{(-ih)}^{(C_{ih})}$;

— $X^D = X_{ih}^D \times X_{(-ih)}^{(C_{ih})}$.

// Construire deux ensembles de stratégies Y^G et Y^D à partir de X^G et X^D

— $Y^G = \times_{\forall X_{jg} \in X^G} \{X_{jg}^G, \bar{X}_{jg}^G\}$;

— $Y^D = \times_{\forall X_{jg} \in X^D} \{X_{jg}^D, \bar{X}_{jg}^D\}$.

// Évaluation de Y^G et Y^D

— Évaluer Y^G et chercher : $m^G = \min_{y \in Y^G} C_{ih}(y)$;

— Évaluer Y^D et chercher : $m^D = \min_{y \in Y^D} C_{ih}(y)$.

// Mise à jour de l'ensemble de stratégies X_{ih} du joueur π_{ih}

(4) **si** $m^G < m^D$ **alors**

$X_{ih} = X_{ih}^G$

sinon

si $m^D < m^G$ **alors**

$X_{ih} = X_{ih}^D$

sinon

// Étude de changement de signe de la dérivée partielle $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}$ par différence

 finie centrée sur X_{ih}^G ou X_{ih}^D

 — $Z_{(-ih)} = X_{(-ih)}^{(C_{ih})}$;

 — $Y_{(-ih)} = \times_{\forall X_{jg} \in Z} \{X_{jg}, \bar{X}_{jg}\}$;

 — $o^G = 0$;

 — $o^D = 0$;

pour chaque $y_{(-ih)} \in Y_{(-ih)}$ **faire**

 — Calculer $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(X_{ih})$, $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\check{X}_{ih})$ et $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\bar{X}_{ih})$.

 — **si** $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(X_{ih}) \times \frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\check{X}_{ih}) < 0$ et $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\check{X}_{ih}) \times \frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\bar{X}_{ih}) > 0$ **alors**

$o^G = o^G + 1$;

sinon si $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\check{X}_{ih}) \times \frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\bar{X}_{ih}) < 0$ et $\frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(X_{ih}) \times \frac{\partial C_{ih}}{\partial x_{ih}}(\check{X}_{ih}) > 0$ **alors**

$o^D = o^D + 1$;

si $o^G > o^D$ **alors**

$X_{ih} = X_{ih}^G$

sinon

si $o^D > o^G$ **alors**

$X_{ih} = X_{ih}^D$

sinon

// Retour sur trace (Backtracking) et sauvegarde de l'intervalle

 — Sauvegarder de $X_{ih} \in [X_{ih}, \bar{X}_{ih}]$ dans X_S ;

 — Retirer X_{ih} de X .

// Tester de condition d'arrêt et sauvegarde de l'intervalle

(5) **si** $\bar{X}_{ih} - X_{ih} \leq \alpha$ de X_{ih} **alors**

 — Sauvegarder $X_{ih} \in [X_{ih}, \bar{X}_{ih}]$ dans X_S ;

 — Retirer X_{ih} de X .

Application du Cadre OCIT¹ à la Segmentation d'Images

5.1	Introduction	64
5.2	Reformulation et Minimisation des Modèles de Fonctions d'Énergies Non-Convexes	64
5.3	Segmentation d'Image avec Marqueurs par Minimisation de Fonctions d'Énergie Monotones	67
5.4	Conclusion	70

1. Optimisation Continue par Intervalle et Théorie des Jeux

5.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, nous allons appliquer le cadre général et l'algorithme proposé dans le chapitre 4 pour la segmentation d'image en utilisant différentes fonctions d'énergies non-convexes. En premier, nous allons exploiter le modèle de Mumford-Shah. Ce modèle est exploité de deux façons ; une statique et une dynamique pour la segmentation d'image. De plus, nous allons tester cette approche sur des modèles de fonctions d'énergies non-convexes, comme la norme ℓ_1/ℓ_2 , la fonction de Geman & McClure et la fonction de Baum - Welch, dans le but de valider l'approche proposée. Nous allons également illustrer et d'exposer quelques résultats de segmentation et les comparer quantitativement et qualitativement.

5.2 Reformulation et Minimisation des Modèles de Fonctions d'Énergies Non-Convexes

Des fonctions d'énergies Φ associées à des fonctions de régularisation $\phi_{\text{régularisation}}$ non-convexes (possiblement non différentiables), sont fréquemment utilisées pour résoudre des problèmes de traitement de signal ou d'image.

Le modèle d'énergie discrétisé de Mumford-Shah [25] a été étudié par plusieurs travaux de recherche sous sa forme continue [88, 26, 27, 89] et sa forme discrète [28, 29, 30]. La plus part des approches continues ne convergent pas vers la solution de l'optimum global. Ce problème est connu comme étant non-convexe [29, 30]. Nous allons exploiter aussi d'autres modèles de régularisation non-convexes comme le modèle ℓ_1/ℓ_2 de régularisation [33], le modèle de Geman & McClure [34], et la famille des A-fonctions exponentielle appelée aussi la technique de Baum-Welch [90]. Tous les modèles de fonctions d'énergies étudiés sont continus, monotones [35, 33] et différentiables [35]. Afin de démontrer la monotonie globale de ces fonctions, nous nous basons sur la monotonie de ces fonctions en une dimension. Chaque fonction non-convexe à minimiser Φ est simplement la somme de plusieurs fonctions monotones à une variable. Une reformulation de ces problèmes est proposée en utilisant un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts continus. Ce type de jeu exige que la fonction potentielle globale à traiter soit différentiable sur X . Vu que ces fonctions sont globalement monotones tout au long de chaque variable x_{ih} sur l'espace compact X . D'après Le théorème de Lebesgue², les fonctions dans ce chapitre sont différentiables sur X . De plus, nous allons résoudre

2. Pour chaque fonction monotone sur un intervalle X_{ih} est différentiable presque partout sur X_{ih}

le problème de minimisation par recherche d'EN continu en utilisant l'algorithme de division d'intervalles (Algorithme 4) présenté dans le chapitre précédent.

5.2.1 Généralisation et Reformulation du Modèle Mumford - Shah Dynamique et Statique

Dans [30], le modèle de fonction d'énergie Mumford - Shah est présenté sous deux formes ; forme Doublephase pour la segmentation d'image par extraction d'un seul objet, et une forme Multiphase pour la segmentation d'image pour extraction de plusieurs objets. Nous proposons une formule généralisée de ce modèle qui combine les deux modèles d'équations, Doublephase et Multiphase, proposés dans [30]. Ce modèle généralisé est défini dans ce qui suit (Equation 5.1).

$$\begin{aligned}
 \Phi_{MS} &= \phi_{\text{fidélité}} + \phi_{\text{régularisation}}, \\
 \phi_{\text{fidélité}} &= \sum_{v_i \in V} \sum_{k=0}^{2^l-1} \left[(u_i - I_k)^2 \prod_{h=1}^l n_{kh} x_{ih} (1 - n_{kh}) (1 - x_{ih}) \right], \\
 \phi_{\text{régularisation}} &= \sum_{v_i \in V} \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} |x_{ih} - x_{jh}|, \\
 \sum_{h=1}^l 2^{(h-1)} n_{kh} &= k, \quad n_{kh} \in \{0,1\}, \\
 I_k &= \frac{\sum_{v_i \in V} u_i \prod_{h=1}^l n_{kh} x_{ih} (1 - n_{kh}) (1 - x_{ih})}{\sum_{v_i \in V} \prod_{h=1}^l n_{kh} x_{ih} (1 - n_{kh}) (1 - x_{ih})}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où u_i est l'intensité du nœud v_i , I_k est l'intensité moyenne à l'intérieur de la région k , L est l'ensemble contraintes ou marqueurs dans l'image, ν_h est un facteur de poids contrôlant la contribution du terme de régularisation dans la fonction globale Φ_{MS} et $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{il}) \in [0,1]^l$ est un vecteur de potentiels associés au nœud v_i , un potentiel x_{ih} pour chaque joueur π_{ih} . x_{ih} reflète le degré d'appartenance de ce nœud v_i à une région h .

Par la suite, nous avons besoin de définir la fonction de coût de ce modèle généralisé. En appliquant la règle présentée par l'égalité dans l'Equation 2.13, nous sommes dans le cas d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts. La fonction de coût suivante (Equation 5.2) est bien la fonction de coût qui jouera un rôle primordiale dans la recherche de l'EN continu du jeu associé au modèle du Mumford-Shah.

$$\begin{aligned}
 C_{ih}^{MS}(x) &= \sum_{k=0}^{2^l-1} \left[(u_i - I_k)^2 \prod_{g=1}^l n_{kg} x_{ig} (1 - n_{kg}) (1 - x_{ig}) \right] \\
 &+ 2 \times \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} |x_{ih} - x_{jh}|
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Le modèle de fonction de Mumford-Shah peut être encore étendu. En se basant sur le calcul de l'intensité moyenne de chaque région I_k .

5.2.2 Exploitation de Fonctions d'Énergies Non-Convexes par Théorie des Jeux Continus

Pour tester et évaluer l'approche proposée, nous considérons quelques modèles d'énergies non-convexes, et monotones [35], présentées dans la Table 5.1 (Annexe A.1). Le modèle de fonction de régularisation ℓ_1/ℓ_2 est le rapport des normes ℓ_1 et ℓ_2 . Cette fonction est une pénalité invariante empirique non-convexe. De plus, cette fonction est monotone [91]. Le modèle de fonction de régularisation Geman & McClure est non-convexe et croissant sur \mathbb{R}^+ [92], d'où elle est aussi monotone sur \mathbb{R}^+ . Concernant le modèle de fonction de régularisation de la famille des exponentiels, Baum-Welch, cette fonction est bien non-convexe et croissante [90], d'où elle est monotone. Par la suite toutes les fonctions utilisées au cours de ce chapitre sont globalement monotones. La minimisation de ces modèles de fonctions est vue comme étant une déconvolution aveugle de la fonction. Leur utilité est bien démontrée en traitement de signal et restauration d'image, qui ont donné de bons résultats sur ces domaines en les minimisant. Cependant, ils sont connus pour leur difficulté d'optimisation. Les algorithmes de minimisation proposés dans la littérature sont efficaces pour un nombre réduit de variables en suivant des transformations convexes, afin de garantir la convergence vers le minimum. Ces transformations sont des approximations de ces modèles de fonctions non-convexes. Dans ce travail, nous avons utilisé ces fonctions telles qu'elles sont, sans approximation.

Le but ici est de chercher l'optimum x^* , en cherchant l'EN continu d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts. Le choix de ces fonctions est basé sur le fait que la fonction d'énergie Φ doit favoriser la récupération des contours nets. Ces contours sont récupérés après avoir minimiser Φ . En d'autres termes, les meilleurs optima locaux dessinent des contours nets entre des régions homogènes. Cependant, ces fonctions énergies non-convexes sont fastidieuses à contrôler et à minimiser, car le problème de minimisation de ce type de fonction est classé comme étant combinatoire. Seuls quelques algorithmes sont capables de trouver l'optimum global dans des cas particuliers. La Table 5.1 illustre, pour chaque fonction d'énergie, la fonction de coût correspondante. Ces fonctions seront utilisées pour la recherche de l'EN continu correspondant en utilisant l'Algorithme 4 proposé dans la section 4.3 du chapitre 4.

Fonction d'Énergies Non-Convexe	Fonction de Coût Correspondante
$\Phi_{\ell_1/\ell_2}(x) = \sum_{v_i \in V} \sum_{h \in L} \ln \left[\frac{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} x_{ih} - x_{jh} + \delta}{\sqrt{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^2 x_{ih} - x_{jh} ^2 + \gamma^2}} \right]$ Modèle de fonction de régularisation ℓ_1/ℓ_2 .	$C_{ih}^{\ell_1/\ell_2}(x^{(C_{ih})}) = \ln \left[\frac{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} x_{ih} - x_{jh} + \delta}{\sqrt{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^2 x_{ih} - x_{jh} ^2 + \gamma^2}} \right]$ $+ \sum_{v_j \in \{V \setminus \{e_{ij} \in E\}\}} \ln \left[\frac{w_{ij} x_{ih} - x_{jh} + \sum_{\substack{e_{jk} \in E, \\ k \neq i, j \neq i}} w_{kj} x_{kh} - x_{jh} + \delta}{\sqrt{\sum_{\substack{e_{jk} \in E, \\ k \neq i, j \neq i}} w_{kj}^2 x_{kh} - x_{jh} ^2 + \gamma^2}} \right]$
$\Phi_{GM}(x) = \sum_{h \in L} \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} \frac{\gamma x_{ih} - x_{jh} ^2}{1 + \delta x_{ih} - x_{jh} ^2}$ Modèle de fonction de régularisation Geman & McClure (GM).	$C_{ih}^{GM}(x^{(C_{ih})}) = w_{ij} \frac{\gamma x_i - x_j ^2}{1 + \delta x_i - x_j ^2}$
$\Phi_A(x) = \sum_{h \in L} \sum_{e_{ij} \in E} \gamma \cdot w_{ij} (1 - e^{-\delta x_{ih} - x_{jh} ^2})$ A-fonction pour le modèle de fonctions de régularisation de la famille des exponentiels, aussi appelée fonction de Baum-Welch.	$C_{ih}^A(x^{(C_{ih})}) = \sum_{e_{ij} \in E} \gamma \cdot w_{ij} (1 - e^{-\delta x_{ih} - x_{jh} ^2})$

TABLE 5.1 – Fonctions potentielles non-convexes utilisées pour la minimisation d'énergie en traitement de l'image [35].

5.3 Segmentation d'Image avec Marqueurs par Minimisation de Fonctions d'Énergie Monotones

Comme déjà mentionné, au cours de ce chapitre, les fonctions exploitées sont non-convexes mais continues et globalement monotones. Le choix de la fonction de Mumford-Shah est fait essentiellement afin de voir et étudier l'efficacité de l'approche proposée sur une fonction d'énergie non-convexe déjà exploitée dans la littérature. Par la suite, une comparaison des résultats de notre méthode sera effectuée avec ceux des méthodes de minimisation de la même fonction déjà existantes. Pour cela nous avons choisi de comparer nos résultats de segmentations avec ceux de Chan Vese [26] et de Nikolova [32]. Nous avons considéré que l'image est un graphe 8-connecté. Ce choix affecte la complexité et le temps d'exécution par rapport à un graphe 4-connecté, mais il donnera plus de précision aux résultats. L'algorithme proposé dans ce chapitre pour minimiser des fonctions d'énergies non-convexes, traite tout les objets (ou marqueurs ou contraintes) en parallèle. Ensuite, chaque nœud v_i du graphe G prend l joueurs $\pi_i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{il})$. L'approximation initiale pour la segmentation d'image est présentée dans notre chapitre par quelques contraintes et limitation de recherche dans un

espace métrique compact $[0,1]^{n \times l}$. Dans notre cas les contraintes d'égalités se présentent sous la forme d'assignation de labels, c'est à dire, forcer quelques uns des variables x_{ih} à zéro et autres à 1, selon le besoin de l'utilisateur. En d'autres termes, si le joueur $\pi_{ih} \in \Pi$, avec $x_{ih} = 1$, appartient à l'objet $h \in L$. Et si ce joueur, avec $x_{ih} = 0$, il appartient à un objet autre que $h \in L$. Ensuite, il faut trier les joueurs en utilisant l'Algorithme 2 avant de passer à l'élimination des stratégies dominées. La dernière étape de l'algorithme consiste alors à appliquer la division d'intervalles (Algorithme 4). La recherche de l'EN continu converge vers un optimum local pour les fonctions d'énergies non-convexes. Pour la dernière étape de cet algorithme, chaque x_{ih} prend une valeur de l'intervalle réduit correspondant. La Figure 5.1 présente les résultats de segmentations minimisant la fonction Mumford Shah présentée par l'Equation 5.1 en utilisant l'algorithme de Division d'Intervalles pour la recherche de l'EN continu dans un graphe (Algorithme 4) déjà décrit par ce chapitre. *La première colonne* représente les images brutes à segmenter du benchmark Berkeley. *La seconde colonne* représente les marqueurs utilisés pour le processus de segmentation. *La troisième colonne* englobe les formes des objets extraites des images d'entrées en utilisant notre méthode basée sur un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts continus, et appliquant l'Algorithme 4 pour minimiser la fonction Mumford Shah (Equation 5.1). Pour comparer nos résultats, *la quatrième et cinquième colonnes* illustrent les formes des même objets extraits en utilisant les méthodes discrètes de la fonction Mumford Shah, respectivement Chan Vese Convexe [32] et le modèle classique de Chan Vese [26]. D'après ces résultats, nous pouvons noter visuellement que les notre sont de meilleures qualités par rapport aux autres.

La Figure 5.2 présente des résultats de segmentation de minimisation du modèle Mumford Shah classique, qu'on a noté Mumford Shah Statique, et un modèle étendu de la même fonction, noté Mumford Shah Dynamique, mais en mettant à jour I_k (Equation 5.1) à chaque itération de l'Algorithme 4. Pour le modèle Statique, le calcul de I_k se fait une seule fois avant de commencer la minimisation de la fonction, en se basant seulement des marqueurs utilisés sur l'image à segmenter. Concernant le modèle Dynamique, le calcul de tous les I_k , $0 \leq k \leq (2^l - 1)$ se fait à chaque itération, en prenant en considération les pixels ou les nœuds $v_i \in V$ avec $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{il})$ tel que si $x_{ih} \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $n_{kh} = 1, \forall h \in L$.

Afin de valider notre approche en utilisant d'autres fonctions d'énergies non-convexes ont été testées. Dans la Figure 5.3, des résultats de segmentations du même benchmark sont présentés. *La première colonne* représente les images brutes à segmenter du bench-

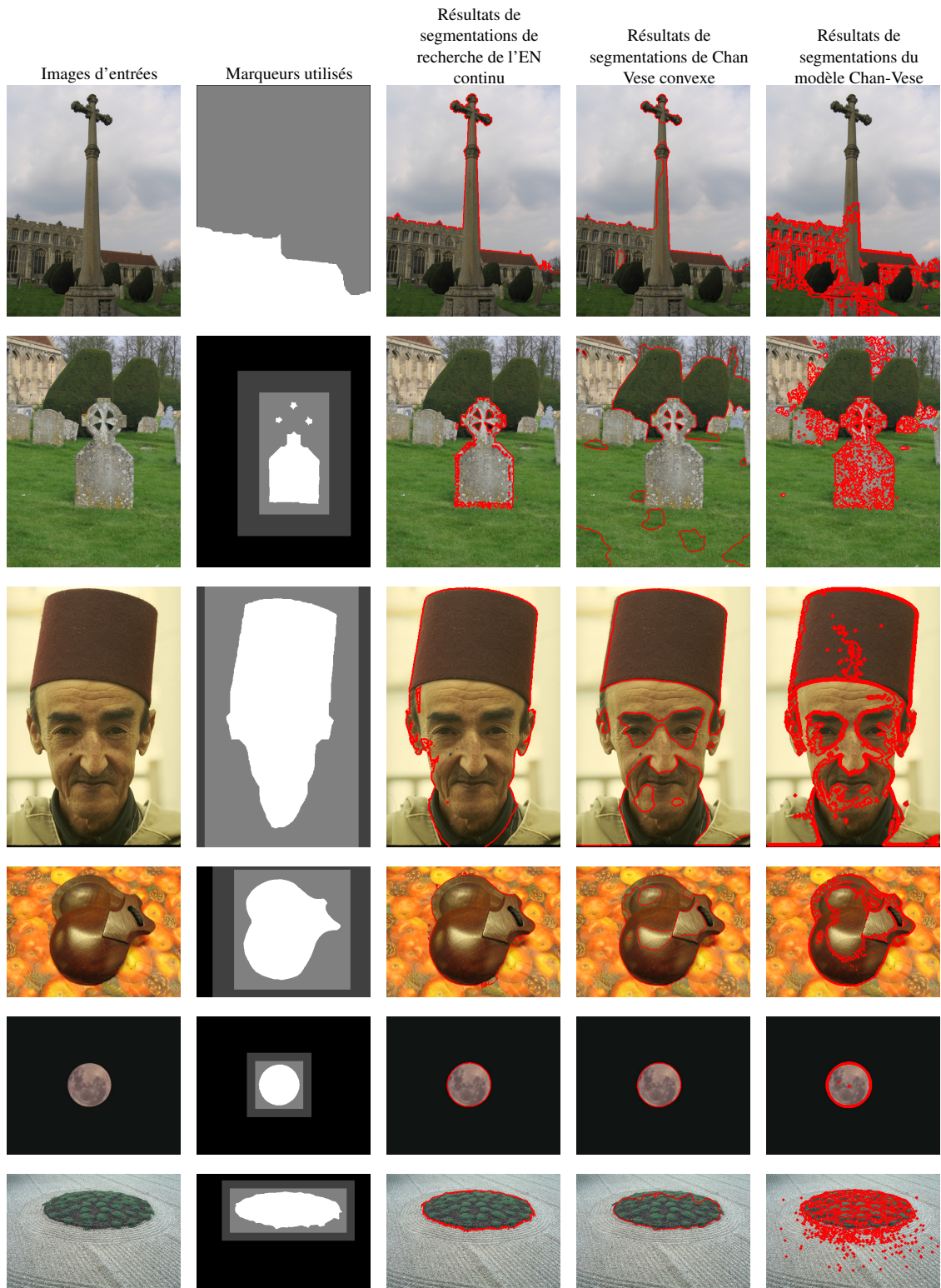


FIGURE 5.1 – Résultats de segmentations de quelques images du benchmark Berkeley en minimisant la fonction d'énergie de Mumford Shah (version Statique).

mark Berkeley. *La seconde colonne* représente les marqueurs utilisés pour le processus de segmentation. *La troisième, la quatrième et la cinquième colonnes* présentent les

formes des objets extraits des images d'entrées en minimisant la fonction de régularisation ℓ_1/ℓ_2 , la fonction Geman McClure et la A-fonction de la famille exponentielle (Baum - Welch), respectivement (Table 5.1). Ces résultats sont obtenus en utilisant notre méthode. D'après ces résultats, notre méthode a permis d'extraire des objets de bonnes qualités d'un point de vue visuelle.

Dans le but d'évaluer quantitativement les résultats de segmentation obtenus par minimisation de différentes fonctions proposées, une étude statistique est présentée. Cette étude compare nos résultats avec ceux de Chan Vese [26] et de Nikolova [32]. Pour cette évaluation, les mêmes métriques utilisées sont les mêmes qu'en Chapitre 3.

Selon les boites à moustaches (Figure 5.4) illustrant ces métriques pour le modèle Mumford Shah, nous pouvons confirmer que notre approche appliquée sur les deux modèles, Statique et Dynamique, donnent de meilleurs résultats en comparaison avec ceux de Level Set de Chan - Vese [26] et le modèle convexe de Nikolova [32]. De plus, nous pouvons constater que le modèle Dynamique de Mumford Shah donne les meilleurs résultats (Table 5.2), ce qui confirme l'illustration sur la Figure 5.2.

La Figure 5.5 et la Table 5.3 montrent que notre approche de minimisation par théorie des jeux est bien efficace en utilisant des fonctions d'énergies non-convexes. Cela est confirmé puisque les résultats sont meilleurs que ceux du modèle de fonction Mumford Shah, qu'on a aussi minimisé en utilisant notre approche. D'où, notre approche réussit à minimiser des fonctions d'énergies non-convexes mais seulement continues et globalement monotones sur le domaine de recherche.

Aussi, nous pouvons remarquer que les optima varient d'une fonction à l'autre, et cela dépend de la fonction traitée. Ce qui prouve une autre fois que notre approche est efficace quelque soit la fonction.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé l'algorithme proposé dans le chapitre précédent sur la nouvelle reformulation des fonctions d'énergies non-convexes pour la segmentation d'image. L'Équilibre de Nash continu est atteint en un temps bien réduit pour tous les modèles de fonctions. De plus, on a étendu la fonction d'énergie Mumford Shah en deux formes, Statique et Dynamique. Pour valider notre approche, nous avons minimisé d'autres fonctions d'énergies non-convexes. Les résultats de segmentation sur le benchmark Berkeley ont été évalués et comparés par rapport à d'autres modèles de la même famille de minimisation de fonction d'énergies non-convexes existantes dans

la littérature.

Dans le chapitre qui suit, nous allons donner un autre cas d'utilisation de notre approche sur le traitement d'image.

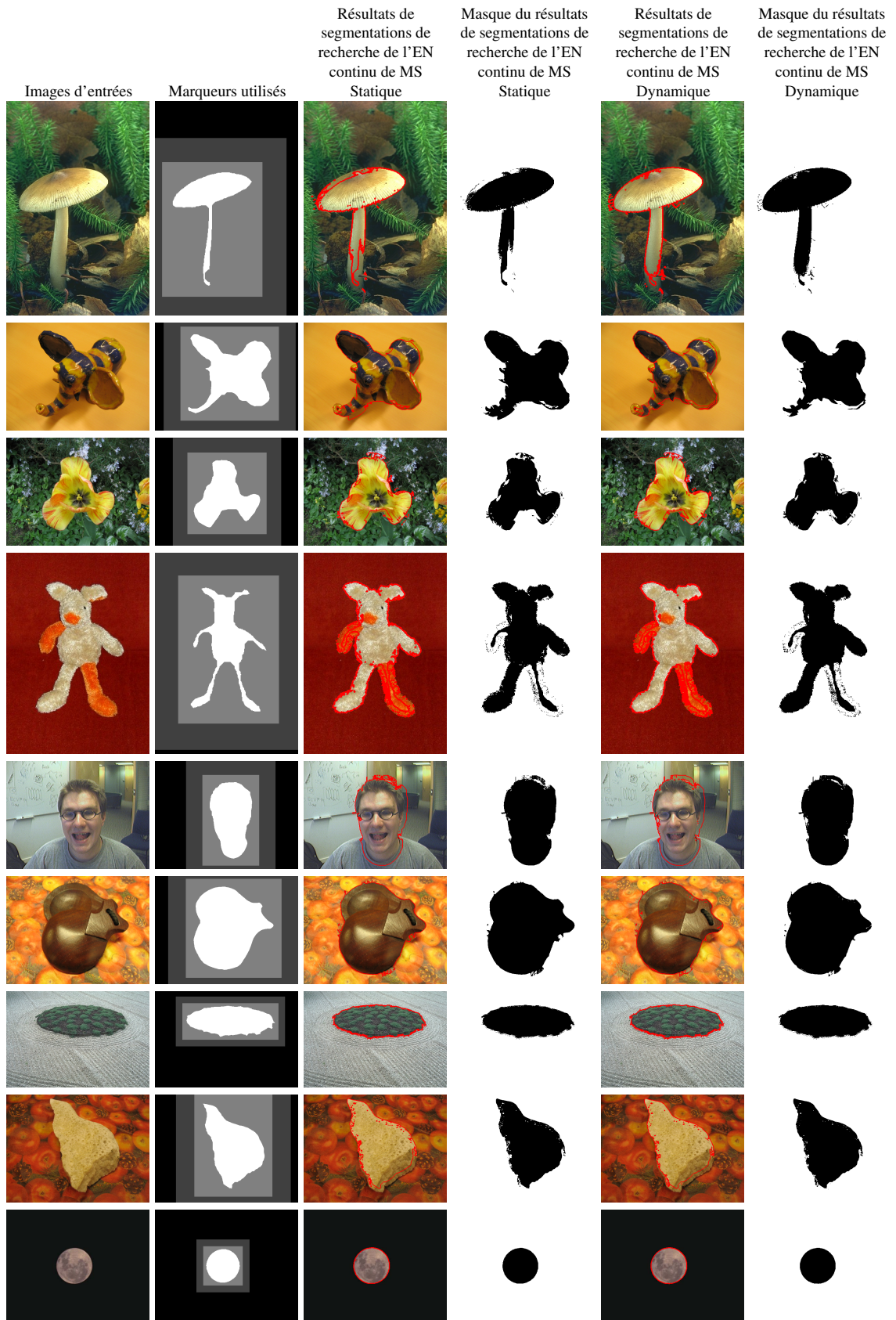


FIGURE 5.2 – Résultats de segmentations de quelques images du benchmark Berkeley en minimisant la fonction Mumford Shah avec les deux versions Statique et Dynamique.

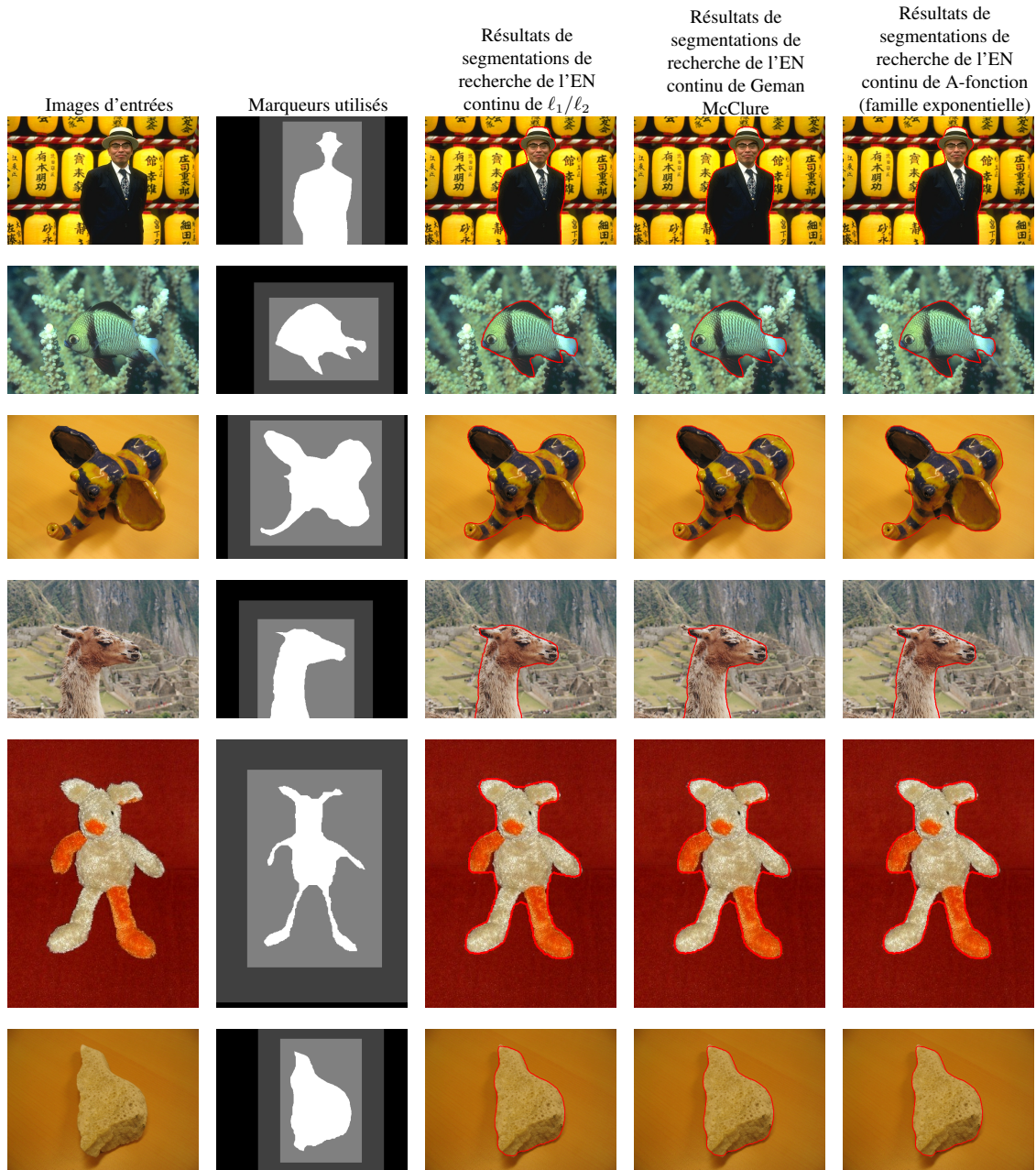


FIGURE 5.3 – Résultats de segmentations de quelques images du benchmark Berkeley en minimisant la fonction de régularisation ℓ_1/ℓ_2 , la fonction Geman McClure et la A-fonction de la famille exponentielle (Baum - Welch).

		Level Set	CV Nikolova	MS Statique	MS Dynamique
Coefficient de Dice	Moyenne	0.940407	0.977758	0.980143	0.980252
	Médian	0.944743	0.976753	0.983451	0.983731
	Std	0.026483	0.011907	0.012297	0.012144
	Meilleur	0.993533	0.996433	0.998210	0.998359
	Moindre	0.874185	0.948258	0.940946	0.948036
Corrélation Interclasse	Moyenne	0.939971	0.977588	0.979991	0.980101
	Médian	0.944331	0.976575	0.983323	0.983607
	Std	0.026666	0.011996	0.012388	0.012234
	Meilleur	0.993483	0.996405	0.998196	0.998346
	Moindre	0.873311	0.947872	0.940511	0.947650
Coefficient de Similarité Volumique	Moyenne	0.945073	0.985380	0.985714	0.985601
	Médian	0.948767	0.985914	0.988804	0.989696
	Std	0.025468	0.011448	0.011589	0.011642
	Meilleur	0.993598	0.999882	0.998775	0.998775
	Moindre	0.879058	0.953062	0.949207	0.951388
Erreur de Globale de Cohérence	Moyenne	0.120597	0.053101	0.047966	0.047664
	Médian	0.112472	0.052934	0.041016	0.040315
	Std	0.048832	0.024135	0.026003	0.025701
	Meilleur	0.015919	0.010814	0.005744	0.005283
	Moindre	0.232703	0.106741	0.131513	0.111685
Distance Probabiliste	Moyenne	0.000252	0.000090	0.000080	0.000080
	Médian	0.000229	0.000093	0.000066	0.000064
	Std	0.000119	0.000049	0.000051	0.000050
	Meilleur	0.000026	0.000014	0.000007	0.000006
	Moindre	0.000564	0.000214	0.000246	0.000215
Sensibilité (Taux Vrai Positive)	Moyenne	0.892537	0.963921	0.966589	0.966590
	Médian	0.898700	0.963917	0.972998	0.974730
	Std	0.046313	0.022118	0.022644	0.022602
	Meilleur	0.987213	0.995502	0.996988	0.997138
	Moindre	0.779867	0.905744	0.899365	0.904086
F-measure	Moyenne	0.940407	0.977758	0.980143	0.980252
	Médian	0.944743	0.976753	0.983451	0.983731
	Std	0.026483	0.011907	0.012297	0.012144
	Meilleur	0.993533	0.996433	0.998210	0.998359
	Moindre	0.874185	0.948258	0.940946	0.948036
Distance Moyenne de Hausdorff	Moyenne	0.092864	0.025814	0.028529	0.028427
	Médian	0.089659	0.027033	0.021885	0.021111
	Std	0.041885	0.013909	0.019950	0.019907
	Meilleur	0.011703	0.004142	0.002071	0.001860
	Moindre	0.209784	0.060519	0.089559	0.085666

Les meilleurs résultats pour chaque métrique sont en gras.

TABLE 5.2 – Quelques comparaisons quantitatives par des métriques évaluant les segmentations par minimisation de la fonction de Mumford Shah sur le benchmark Berkeley.

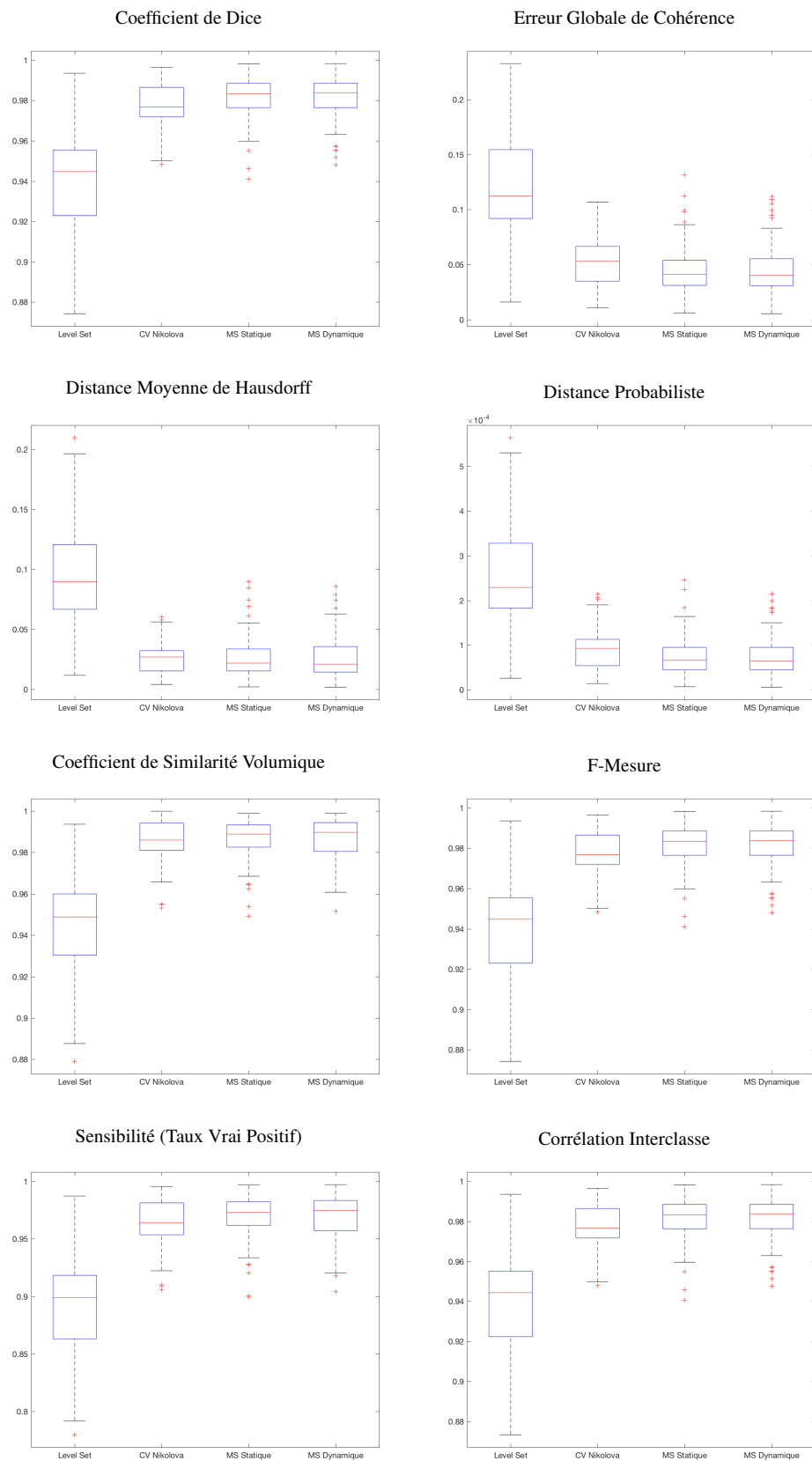


FIGURE 5.4 – Boîtes à moustaches évaluant les métriques de Table 5.2.

		MS Dynamique	MS Statique	Norme ℓ_1/ℓ_2	Geman & McClure	Baum - Welch
Coefficient de Dice	Moyenne	0.980252	0.980143	0.993693	0.994444	0.994448
	Médian	0.983731	0.983451	0.994268	0.995312	0.995336
	Std	0.012144	0.012297	0.003171	0.002756	0.002757
	Meilleur	0.998359	0.998210	0.998626	0.998616	0.998603
	Moindre	0.948036	0.940946	0.979766	0.982905	0.982952
Corrélation Interclasse	Moyenne	0.980101	0.979991	0.993644	0.994401	0.994405
	Médian	0.983607	0.983323	0.994224	0.995274	0.995300
	Std	0.012234	0.012388	0.003196	0.002778	0.002778
	Meilleur	0.998346	0.998196	0.998615	0.998605	0.998592
	Moindre	0.947650	0.940511	0.979611	0.982773	0.982820
Coefficient de Similarité Volumique	Moyenne	0.985601	0.985714	0.998195	0.998181	0.998181
	Médian	0.989696	0.988804	0.998162	0.998071	0.998058
	Std	0.011642	0.011589	0.000917	0.000918	0.000919
	Meilleur	0.998775	0.998775	0.999948	0.999779	0.999779
	Moindre	0.951388	0.949207	0.995522	0.995701	0.995701
Erreur de Globale de Cohérence	Moyenne	0.047664	0.047966	0.020008	0.017962	0.017950
	Médian	0.040315	0.041016	0.018399	0.015147	0.015120
	Std	0.025701	0.026003	0.009766	0.008781	0.008782
	Meilleur	0.005283	0.005744	0.004441	0.004482	0.004524
	Moindre	0.111685	0.131513	0.060789	0.053653	0.053549
Distance Probabiliste	Moyenne	0.000080	0.000080	0.000025	0.000022	0.000022
	Médian	0.000064	0.000066	0.000023	0.000019	0.000019
	Std	0.000050	0.000051	0.000013	0.000011	0.000011
	Meilleur	0.000006	0.000007	0.000005	0.000005	0.000005
	Moindre	0.000215	0.000246	0.000081	0.000068	0.000068
Sensibilité (Taux Vrai Positive)	Moyenne	0.966590	0.966589	0.992152	0.992884	0.992886
	Médian	0.974730	0.972998	0.993231	0.993755	0.993757
	Std	0.022602	0.022644	0.003510	0.003093	0.003093
	Meilleur	0.997138	0.996988	0.997429	0.997589	0.997597
	Moindre	0.904086	0.899365	0.977952	0.981801	0.981874
F-measure	Moyenne	0.980252	0.980143	0.993693	0.994444	0.994448
	Médian	0.983731	0.983451	0.994268	0.995312	0.995336
	Std	0.012144	0.012297	0.003171	0.002756	0.002757
	Meilleur	0.998359	0.998210	0.998626	0.998616	0.998603
	Moindre	0.948036	0.940946	0.979766	0.982905	0.982952
Distance Moyenne de Hausdorff	Moyenne	0.028427	0.028529	0.007143	0.006261	0.006256
	Médian	0.021111	0.021885	0.006342	0.005345	0.005338
	Std	0.019907	0.019950	0.003648	0.003153	0.003153
	Meilleur	0.001860	0.002071	0.001464	0.001486	0.001497
	Moindre	0.085666	0.089559	0.023541	0.019762	0.019700

Les meilleurs résultats pour chaque métrique sont en gras.

TABLE 5.3 – Quelques comparaisons quantitatives par des métriques évaluant les segmentations par minimisation de régularisation ℓ_1/ℓ_2 , la fonction Geman McClure et la A-fonction de la famille exponentielle (Baum - Welch) sur le benchmark Berkeley.

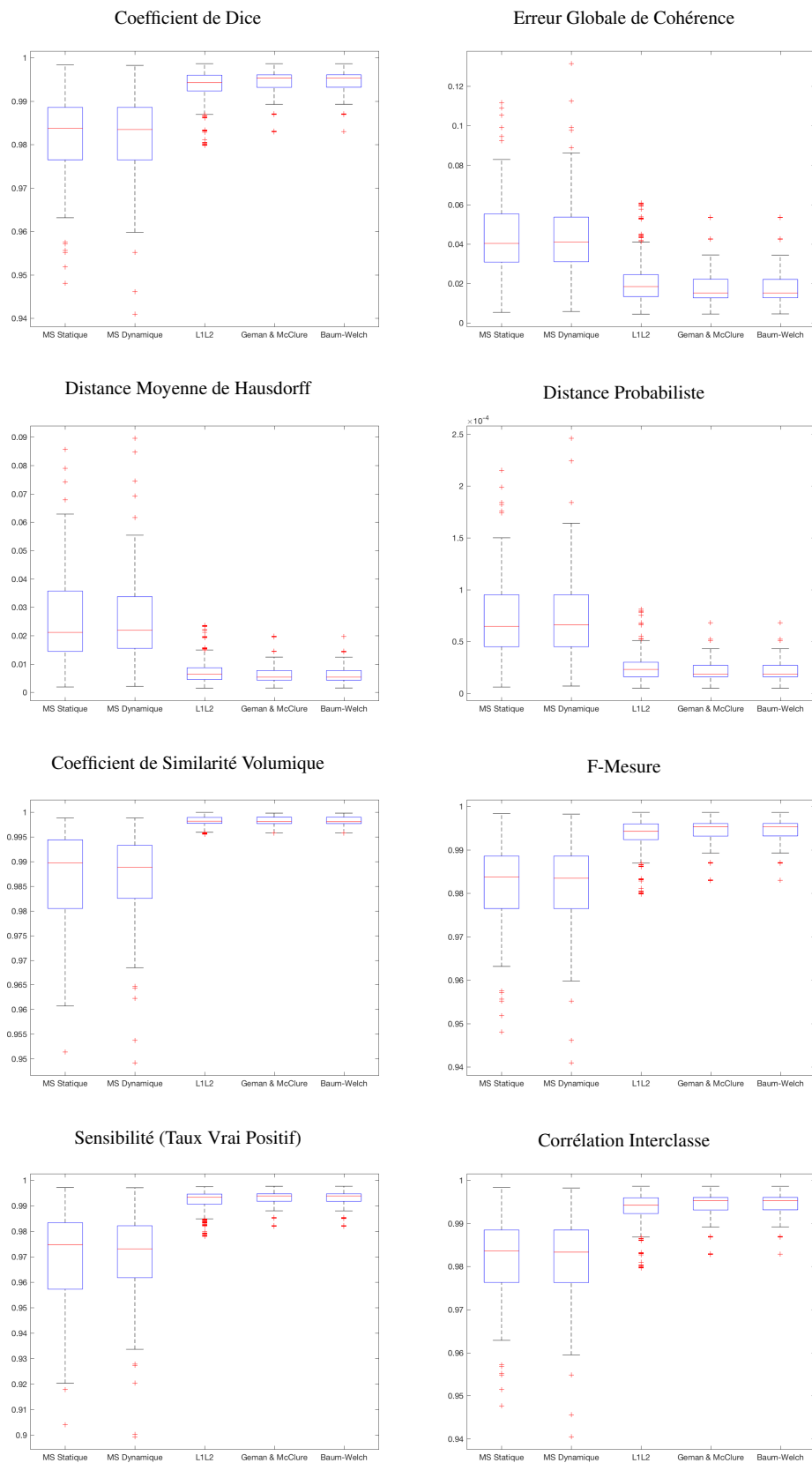


FIGURE 5.5 – Boîtes à moustaches évaluant les métriques de Table 5.3.

Extension du Cadre basé sur la Théorie du Jeu pour le Filtrage d'Images par Diffusion Anisotrope

6.1	Introduction	79
6.2	Principe de Diffusion Anisotrope pour Filtrage d'Images	79
6.3	Formulation comme Jeu Stratégique non Coopératif à Potentiels Exacts Continus	80
6.4	Résultats et Discussion	81
6.5	Conclusion	83

6.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, nous allons appliquer ces méthodes pour le filtrage d'images par diffusion anisotrope. Nous allons essayer de voir si la recherche de l'EN permet d'avoir une image filtrée nette, tout en étant fidèle aux contours et l'homogénéité de l'image. Les fonctions d'énergies utilisées sont le LPEP (q finie et p finie), pour les fonctions convexes, et les fonction de Geman & McClure et Baum-Welch pour les fonctions non-convexes. Aussi, nous allons exposer des résultats de filtrage de quelques images médicales.

6.2 Principe de Diffusion Anisotrope pour Filtrage d'Images

Dans la littérature, il existe différentes méthodologies de filtrage, et la plupart sont principalement basées sur la transformation des niveaux de gris des pixels en fonction de leurs voisins. Mais, elles causent la perte d'informations, qui jouent un rôle primordial pour les interprétations surtout pour les images médicales. En effet, elles contiennent des détails au niveau de la forme des contours et l'intensité des régions. Et la perte de ces détails influence le diagnostic final établi par l'expert. Par conséquent, il est nécessaire de trouver le filtre adéquat qui permet de diminuer l'influence du bruit tout en conservant les contours et l'homogénéité de l'image. Perona et Malik [93] ainsi que Black [94] et après Couprie [95] ont proposé des modèles de filtres par diffusion anisotrope pour préserver les contours tout en éliminant le bruit dans l'image dépendant des caractéristiques spatiales et temporelles de la zone considérée. Ces modèles sont des diffusions non linéaires basés sur un coefficient de diffusion variable en fonction de la zone traitée. La problématique traitée par ces modèles consiste à réduire la diffusion dans les zones à grande variation de niveau de gris lors du passage d'une région à une autre, c'est à dire de fortes valeurs de gradients. Le principe adopté encourage le filtrage en affectant un poids fort dans le cas de variation faible de niveau de gris dans une même région (faible gradient), et pénalise le filtrage en affectant un poids faible dans le cas de variation forte de niveau de gris, au niveau des contours (fort gradient).

Au cours de ce chapitre, nous allons utiliser le même principe en associant quelques changements au niveau des fonctions d'énergies utilisées et la méthode d'optimisation. Le principe mathématique de ces modèles prend la forme continue classique présentée par l'Equation 6.1.

$$\frac{dx}{dt} = \nabla \cdot (g(\nabla x) \nabla x) \tag{6.1}$$

avec $x \in [0,1]^n$ présente le quotient des intensités de l'image filtrée par 255, et x est le vecteur de potentiel à chercher, mais il prend comme valeur les intensités de l'image à traiter (image d'entrée) à $t = 0$. La variable t est un paramètre de temps artificiel, dans le cas discret, cette variable dénote le nombre d'itérations pour décider si x^t est jugé est le résultat final du filtrage par diffusion anisotrope. La fonction $g(x)$ est un coefficient de diffusion positif de forme décroissante empêchant la dissolution des contours dans l'image. Cette fonction est l'élément clé de la diffusion anisotrope, dont on peut bien donner différentes formes. Chaque modèle proposé en littérature [93, 94, 95] est caractérisé par une fonction $g(\cdot)$ différente qui donne des résultats différents. Cette fonction est choisie pour satisfaire $g(x) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \infty$, ce qui modélise le fait que la diffusion est arrêtée à travers les contours. D'où, nous pouvons considérer $g(\cdot)$ comme étant une fonction d'énergie à minimiser puisque ces fonctions tiennent en compte ces caractéristiques.

Pour le cas du filtrage par diffusion anisotrope, nous avons besoin de discrétiser l'Equation 6.1 qui prend par la suite la forme présentée par l'Equation 6.2.

$$\frac{dx}{dt} = A^T \cdot (g(Ax)Ax) \quad (6.2)$$

avec A est la matrice d'incidence du graphe de l'image à filtrer. Cette matrice est utilisée pour définir le calcul discret du gradient, et A^T est utile pour le calcul discret de la divergence.

6.3 Formulation comme Jeu Stratégique non Coopératif à Potentiels Exacts Continus

Perona et Malik [93] ont discrétisé la relation de diffusion anisotrope (Equation 6.1) comme le montre l'Equation 6.3.

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \lambda \sum_{e_{ij} \in E} g(\nabla(x_i^t, x_j^t)) \nabla(x_i^t, x_j^t) \quad (6.3)$$

Si nous posons $\sum_{e_{ij} \in E} g(\nabla(x_i^t, x_j^t)) \nabla(x_i^t, x_j^t) = C_i(x^t)$, l'Equation 6.3 peut prendre la forme de l'Equation 6.4 en intégrant l'image initiale x^0 à $t = 0$ dans le graphe de représentation du problème comme a suggéré Couprie [95].

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \lambda C_i(x^t), \forall v_i \in V \quad (6.4)$$

avec λ est un paramètre positif de diffusion fixant le taux de similarité de l'image filtrée à l'image d'entrée.

Le graphe utilisé pour ce travail doit contenir l'image à filtrer ainsi que l'image filtrée souhaitée. En d'autres termes, pour chaque nœuds $v_i \in V$ est connecté à ses 4 voisins (si le graphe est 4-connecté) ou à ses 8 voisins (si le graphe 8-connecté). En plus il est connecté à un autre nœud v_{i+n} appartenant à l'image initiale, modélisant la fidélité aux données, et son potentiel y_i est constant $\forall t$. D'où, l'Equation 6.4 prend la forme décrite par l'Equation 6.5.

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \lambda C_i(x^t) + \lambda C_i(x_i^t, y_i), \forall v_i \in V \quad (6.5)$$

Selon Black et al. [94], cette équation peut être vue comme le gradient d'une fonction d'énergie. A son tour Couprie [95] modélise cette diffusion comme étant une minimisation d'énergie Φ en mettant à jour à chaque itération ($t + 1$) les poids par pair $w_{ij}^t = e^{-\varepsilon(x_i^t - x_j^t)^2}$, et les poids unaires $w_i^t = e^{-\varepsilon(y_i - x_i^t)^2}$. Et puisque nous avons modélisé cette fonction d'énergie en fonction des coûts C_i , dans le chapitre 3, la fonction à minimiser prend la forme présentée par l'Equation 6.6.

$$x_{t+1} = \arg \min_x \sum_{v_i \in V} C_i(x) + C_i(x_i, y_i) \quad (6.6)$$

Pour notre cas d'étude, nous allons utiliser le même principe proposé par Couprie [95]. Nous allons changer la fonction d'énergie à optimiser et la méthode d'optimisation de ces fonctions. Les fonctions utilisées sont ceux de LPEP (q fini et p fini), la fonction de Geman & McClure et la fonction de Baum - Welch qu'on a déjà utilisé au cours des chapitres 3 et 4. Pour plus de clarté, une description des étapes de diffusion est donnée par l'Algorithme 5.

6.4 Résultats et Discussion

Au cours de cette section, nous allons présenter quelques résultats de filtrage par diffusion anisotrope (Algorithme 5) via la minimisation de quelques fonctions d'énergie présentées dans la Table 5.1. Concernant la partie minimisation de ces fonctions, nous avons utilisé l'Algorithme 4.

Dans le but d'étudier la fiabilité de notre approche, nous avons ajouté du bruit gaussien aux images. Les bruits utilisés pour l'expérimentation sont variés ; 5%, 9%, 15% et 21%. Le pseudo-code utilisé pour ajouter ce bruit est présenté par l'Algorithme 6.

Les Figures 6.1 et 6.2 présentent des résultats de deux images après bruitage gaussien de leurs vérités de terrain. Pour la Figure 6.1, le pourcentage de bruitage utilisé

Algorithme 5 : Algorithme de diffusion anisotrope utilisant l'algorithme de division d'intervalle (Algorithme 4) pour minimiser les fonctions d'énergie LPE q finie et p finie, la fonction de Geman & McClure et la fonction de Baum - Welch (Table 5.1)

Données :

- Une image à filtrer y ,
- Une solution initiale $x^0 = y$,
- $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ paramètre de ressemblance de x^t finale par rapport à y .
- Choisir la fonction d'énergie à minimiser de la Table 5.1.

Résultat :

- Une image filtrée x^t .

// Initialisation

- (1) Initialiser $t = 0$.
 - (2) Construire un graphe en ajoutant à chaque nœud v_i un nouveau voisin v_{i+N} (pixel i de l'image à filtrer y).
 - (3) **répéter**
 - Calculer les poids par pair $w_{ij}^t = e^{-\varepsilon(x_i^t - x_j^t)^2}$, $\forall e_{ij} \in E$, et les poids unaires $w_i^t = e^{-\varepsilon(y_i - x_i^t)^2}$, $\forall e_{i,i+N} \in E$.
 - Minimiser 6.6 en utilisant la fonction d'énergie Φ choisie et l'Algorithme 4 pour obtenir x^{t+1} .
 - $t = t + 1$.
 - (4) **jusqu'à** $\|x^{t+1} - x^t\|_2 < \varepsilon$;
-

est de 5%. Pour le modèle de fonction LPEP (q fini et p finie), nous constatons une variation des résultats en fonction des valeurs des paramètres q et p choisis. Pour q et p des valeurs proches l'une de l'autre, le modèle est sensible aux contours même avec des gradients visiblement faibles. On voit bien que les zones plus sombre sont distinguées de l'enveloppe extérieure. Pour q de valeur plus faible que celle de p , le modèle détecte plus les gradients les plus élevés, et par la suite les contours sont plus nets. Et concernant le choix q plus importante que p , les résultats donnent des contours plus flous que celles de q faible et p élevé. En résumé, pour le modèle du LPEP, selon le choix des valeurs des paramètres q et p , les résultats seront différents, car en donnant de l'importance à q par rapport à p les contours seront flous et le modèle n'est pas sensible aux gradients faibles. Mais, en donnant de l'importance à p par rapport à q , les contours seront plus nets et le modèle n'est pas très sensible aux gradients faibles. Finalement, en donnant des valeurs proches l'une de l'autre pour q et p , le modèle devient très sensible au gradient faible, au niveau des contours continus et non pas au niveau du bruit local. Selon la structure de la fonction du LPEP, q est un paramètre qui favorise les gradients élevés. Ce paramètre favorise la minimisation des contours. Et p est un paramètre qui est sensible au gradient faible, c'est à dire les objets qui ne

présentent pas un contraste important par rapport à l'arrière plan.

Concernant les résultats donnés par les modèles de fonctions Baum - Welch, Geman & McClure et ℓ_1/ℓ_2 varient avec les fonctions. La qualité des contours varie, car on constate que les contours donnés par la fonction de Geman & McClure sont plus nets par rapport à ceux des autres fonctions. De plus, cette fonction garde le "doute" ou si on peut dire le flou au niveau des petites zones avec des contours flous. Ces zones flous sont plus importantes selon la fonction de Baum - Welch, car on constate que ces zones sont plus grandes et les contours sont plus lisses par rapport aux résultats donnés par la fonction de Geman & McClure. Pour la Figure 6.2, le choix de cette image est basé sur le fait qu'elle ne présente que des gradients forts au niveau des contours, et que les objets à l'intérieur sont très fins comme l'objet branché ou l'objet avec un creux. Le bruitage appliqué sur cette image est de gaussien de 9%. Nous pouvons tirer les mêmes interprétations que celles pour la Figure 6.1.

Concernant la Figure 6.3, nous avons présenté les différents résultats des différents modèles de fonctions, en variant le pourcentage de bruit gaussien de 5%, 9%, 15% et 21%, respectivement sur la même image utilisée pour la Figure 6.2. Le but de cette illustration est de montrer l'efficacité du filtrage proposé lors la puissance du bruit augmente. Cet effet est causé par la fonction utilisée et il ne s'agit pas d'une faiblesse de notre méthode de minimisation, vu que la même méthode est utilisée pour minimiser toutes les autres fonctions. Ces fonctions sont de différents types; convexe et non-convexe. Le modèle de fonction LPEP donnent des résultats différents en variant ses paramètres q et p et aussi en variant le bruit. Mais, en favorisant le paramètre q , par rapport à p , avec un bruit important (comme pour le cas du résultat avec un bruit de 21%), le résultat est meilleur visuellement et les contours sont plus nets. Ici apparaît l'avantage du modèle qui donne des résultats flous au niveau des contours, car il affaiblie l'impact du bruit dans l'image. Concernant les trois autres modèles de fonctions (Baum - Welch, Geman & McClure et ℓ_1/ℓ_2) avec un bruit important (21%), la fonction de Geman & McClure donne le meilleur résultat parmi les trois. Mais avec un bruit moins important les résultats donnés par Baum - Welch et Geman & McClure sont très proches.

6.5 Conclusion

Ce dernier chapitre, est une application autre que la segmentation d'image. Nous avons adapté notre approche pour la filtration d'image par diffusion anisotrope en

Algorithme 6 : Algorithme de bruitage des images selon un pourcentage σ donné.

Données :

- Une image à bruiteur I ,
- Un pourcentage de bruitage σ .

Résultat :

- Une image bruitée I_b .

- (1) $I = I - \min(I)$;
 - (2) $I = I / \max(I)$;
 - (3) $v = (\sigma * \text{std}(I))^2$; // *std* : déviation standard.
// Appliquer un bruit gaussien de variance v .
 - (4) $I_b = \text{bruit}_{\text{gaussien}}(I, v)$;
-

minimisant des fonctions d'énergies convexes et non-convexes. Les résultats présentés en minimisant les fonctions d'énergies LPEP (q fini et p fini), Baum - Welch, Geman & McClure et ℓ_1/ℓ_2 , par notre approche, a donné des résultats différents. Même au sein du même modèle comme le LPEP, les résultats varient en fonction des paramètres q et p . Cette variation et la qualité des résultats, prouvent que notre Algorithme 4 est efficace, pas seulement pour la segmentation d'image mais aussi pour d'autres applications de traitement d'images.

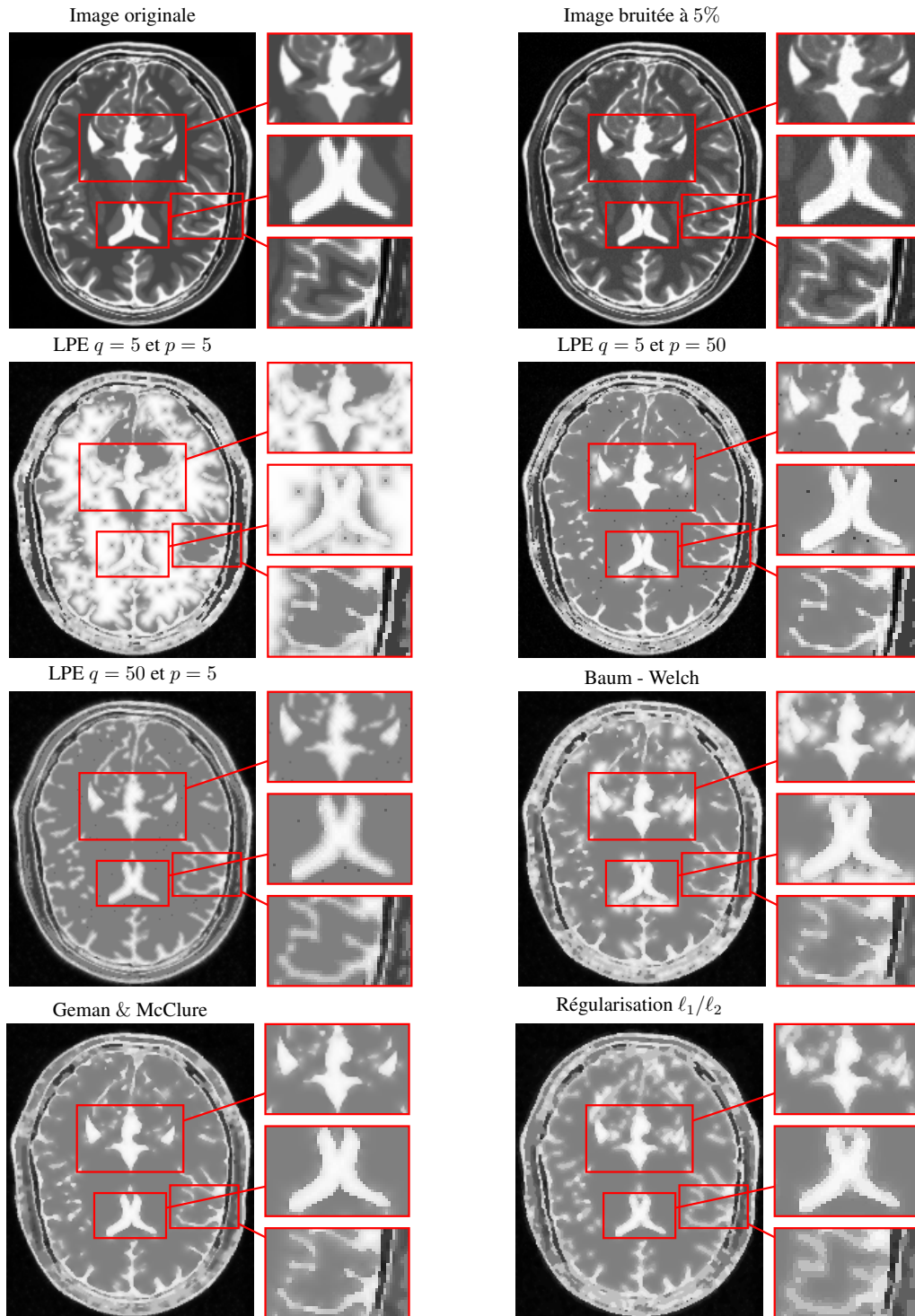


FIGURE 6.1 – Résultats de filtration par diffusion anisotrope par minimisation des fonctions d'énergies LPEP q fini et p fini, Baum - Welch, Geman & McClure et ℓ_1/ℓ_2 de l'image axiale ($z = 80$) du benchmark Brainweb Data [96] avec un bruit gaussien de 5%.

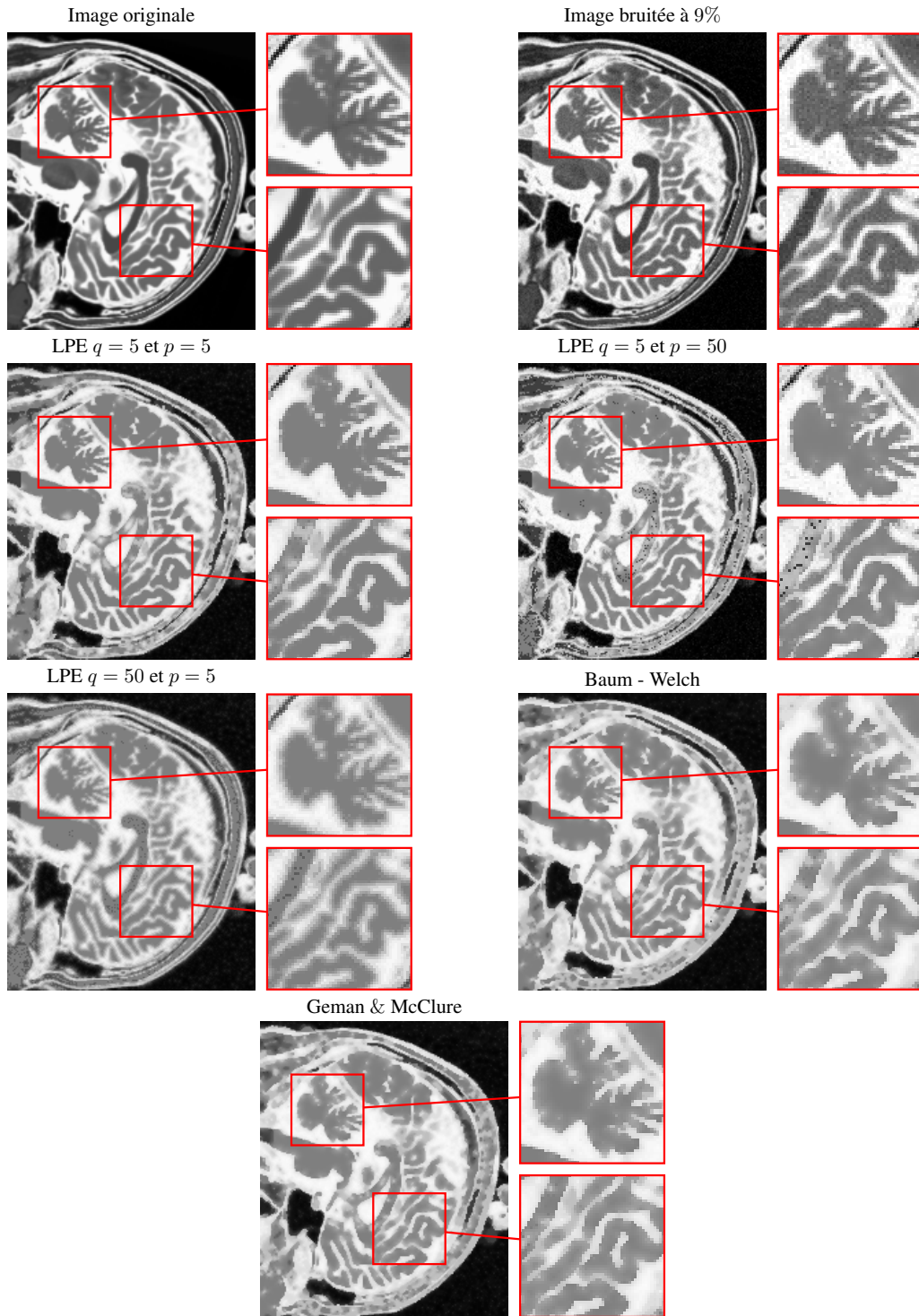


FIGURE 6.2 – Résultats de filtration par diffusion anisotrope par minimisation des fonctions d'énergies LPEP q fini et p fini, Baum - Welch et Geman & McClure de l'image sagittale ($y = 90$) du benchmark Brainweb Data [96] avec un bruit gaussien de 9%.

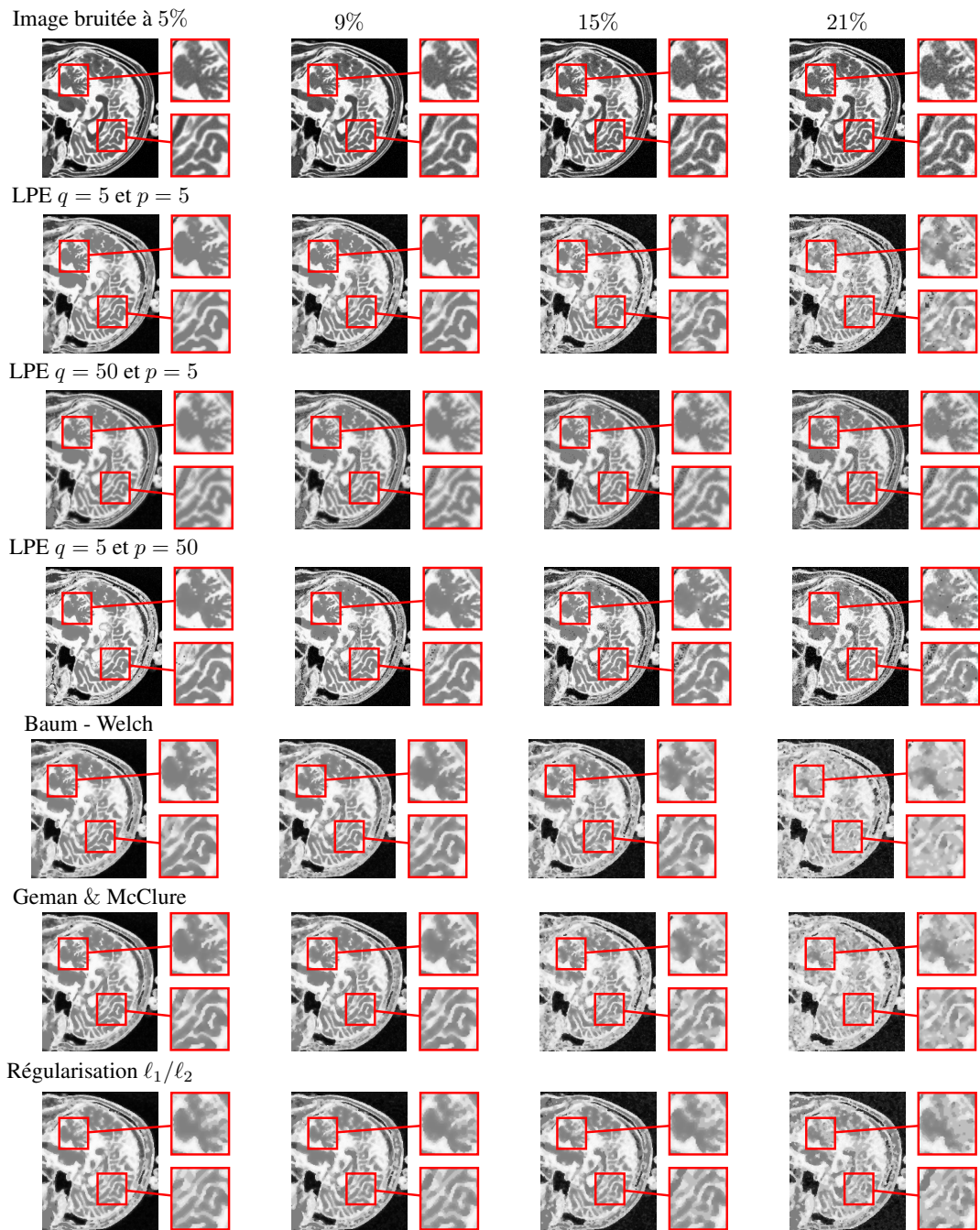


FIGURE 6.3 – Résultats de filtration par diffusion anisotrope par minimisation des fonctions d'énergies LPEP q fini et p fini, Baum - Welch et Geman & McClure de l'image sagittale ($y = 90$) du benchmark Brainweb Data [96] avec un bruit gaussien de 5%, 9%, 15% et 21%, respectivement.

Conclusions et Perspectives

Ce travail de thèse a pour but de proposer deux approches généralisées de minimisation de fonctions d'énergies convexes et non-convexes. Ces approches sont basées sur la théorie de jeux en ce qui concerne la représentation des problèmes, et ont pour but de chercher l'Équilibre de Nash. Une étude théorique a été réalisée afin de bien choisir le type de jeu approprié pour chaque type de fonction d'énergie. Il faut aussi que le type de jeu choisi doit respecter la convergence vers l'Équilibre unique pour les fonctions d'énergies convexes, et au moins, sa stabilité pour les fonctions non-convexes.

Le type de fonctions d'énergies convexes présente des propriétés qui aident à réduire la complexité de l'algorithme d'optimisation et son temps de convergence. Une fonction convexe garantit l'unicité du minimum, ce qui garantit à son tour, l'unicité de l'Équilibre de Nash d'un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts discrets. De plus, l'algorithme d'optimisation ne contiendra pas des conditions décisionnelles exigeantes pour atteindre le minimum du problème. Les tests de segmentation sont faits sur le modèle de fonction Ligne de Partage des Eaux Puissances (LPEP). Ensuite, nous avons comparé les résultats, qualitativement et quantitativement, avec ceux donnés en utilisant le même modèle de fonction, mais en faisant appel aux algorithmes de minimisation correspondants, déjà existants dans la littérature. Les résultats sont de même qualité, voir meilleure dans certains cas. L'approche proposée a permis aussi de minimiser les parties du modèle LPEP non exploitées, les cas (q fini et $p \rightarrow \infty$) et (q fini et p fini), ce qui a permis de valider cette approche.

Il est bien connu que, les fonctions d'énergies non-convexes sont plus fastidieuses à minimiser malgré que leurs minimiseurs sont plus intéressants pour le traitement de l'image. Par conséquent, le choix du type de jeu et de la méthode de minimisation a été plus exigeant afin de garantir au maximum la qualité et la stabilité des optima x^* . Pour ce fait, nous avons choisi de procéder avec un jeu stratégique non coopératif à potentiels exacts continus pour garantir la précision. L'algorithme de minimisation de fonctions d'énergies non-convexes par division d'intervalles a garanti la stabilité de l'équilibre de Nash en utilisant des conditions décisionnelles plus exigeantes. Au début, les tests de segmentation sont faits sur le modèle de fonction d'énergie non-convexe

Mumford - Shah. Ensuite, nous avons comparé les résultats avec ceux générés par les méthodes le Level Set classique et Level Set Convexe. Cette comparaison qualitative et quantitative montre que notre approche donne des résultats meilleurs que ces deux derniers. De plus, cette approche nous a permis d'étendre le modèle Mumford - Shah en dynamique qui a amélioré la qualité les résultats de segmentation. Afin de valider cette deuxième approche pour la segmentation d'image, nous l'avons appliquée sur les fonctions non-convexes qui sont la norme ℓ_1/ℓ_2 , la fonction de Geman & McClure et la fonction de Baum - Welch.

Une autre application de notre approche a été possible. Le filtrage d'images par diffusion anisotrope a été une preuve que nos nouvelles approches sont efficaces autre qu'en segmentation d'image. Cette application nous a permis de voir des résultats variant selon la fonction d'énergie utilisée sur une même image. Cette remarque nous permet de conclure que cette variation dépend de la fonction utilisée. Et pour un type d'image, une fonction est plus efficace plus qu'une autre.

Les perspectives envisageables en prolongement direct de cette thèse concernent trois objectifs importants :

- Étendre les applications de ces approches pour la segmentation d'image 3D et le filtrage par diffusion anisotrope 3D. Ces applications seront bien utiles pour le traitement des images médicales. Ces propositions faciliteront l'impression en 3D des organes, par la suite, intercepter facilement les anomalies.
- Appliquer ces approches à la reconstruction des surfaces. Cette application nous permet de la combiner aux traitement 3D des objets qui est bien utile en diagnostic médical. La minimisation des fonctions d'énergies a prouvé sa présence et son efficacité pour ce domaine.
- Améliorer les approches proposées pour résoudre les problèmes d'optimisation multi-objectif. Ces derniers peuvent être reformulés en utilisant la théorie des jeux. Ensuite, une étude théorique mathématique sera indispensable pour établir le lien entre l'optimum d'un problème d'optimisation multi-objectif et l'équilibre de Nash et/ou de Pareto. Et par la suite, nous aurons la possibilité d'évaluer la fiabilité de nos approches en parallélisant les algorithmes d'optimisation proposés.

Annexe

Γ	L'image
N	Ensemble des pixels de l'image Γ
G	Graphe de l'image Γ , $G = (V, E)$
V	Ensemble des nœuds correspondant aux pixels de l'image Γ $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
E	Ensemble des arêtes dans le graphe G , $E \subseteq V \times V$
v_i	Nœuds du graphe G , $v_i \in V$
e_{ij}	Arête connectant deux nœuds voisins v_i et v_j , $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$
w_{ij}	Poids réel mesurant le degré de connectivité de l'arête e_{ij} , $w_{ij} = (v_i, v_j)$
n	Nombre de nœuds dans le graphe g , $n = V $
m	Nombre d'arêtes dans le graphe G , $m = E $
L	Ensemble des marqueurs de l'image
l	Nombre d'objet à extraire $l = L $
h	Marqueur de l'objet à extraire $h \in L$
Φ	La fonction d'énergie modélisant les variations de l'image
$\phi_{\text{régularisation}}$	Fonction mesurant le degré de non régularité de la zone observée de l'image avec un marqueur h
$\Phi_{\text{fidélité}}$	Fonction mesurant la non régularité entre l'objet marqué par h et les données observées
Ω	Jeu $\Omega = (\Pi, X, C)$
Π	Ensemble fini de joueurs
π_i, π_{ih}	Joueur placé sur le pixel i
$X, X^{(G)}, X^{(D)}$	Ensemble de de profile de stratégies $X = \{X_1, X_2, \dots, X_\mu\}$

X_i, X_{ih}	Intervalle fermé borné initialement égal à $[0,1]$
C	Ensemble de fonctions de coûts $C = \{C_1, C_2, \dots, C_\mu\}$
C_r	Coût réel ou fonction de coût du joueur $\pi_r \in \Pi$
μ	Nombre de joueurs dans Π pour le jeu Ω
r	Indice du joueur (π_r, X_r, C_r)
x_i, x_{ih}	Potentiel du joueur indexé par i, ih respectivement
x	Profile de stratégies $x = (x_1, x_2, \dots, x_\mu) \in X$
x_{-i}, x_{-ih}	Profile de stratégies de tous les joueurs sauf pour les joueur i, ih respectivement
x^*	Profile de minimisuers au minimum $x^* = (x_{11}^*, \dots, x_{nl}^*)$
ϕ_{ih}^f	Fonction évaluant la similarité entre chaque nœud i et l'objet à segmenter h
ϕ_{ih}^r	Fonction mesurant l'interaction entre un nœud i et ses voisins par rapport à un objet h
α	Diamètre d'un intervalle X_{ih} $\alpha = \bar{X}_{ih} - \underline{X}_{ih}$
\bar{X}_{ih}	Borne inférieure de l'intervalle X_{ih}
\underline{X}_{ih}	Borne supérieure de l'intervalle X_{ih}
\check{X}_{ih}	Point milieu de l'intervalle X_{ih} avec $\check{X}_{ih} = \frac{\bar{X}_{ih} + \underline{X}_{ih}}{2}$
$Y^{(G)}, Y^{(D)}$	Ensemble de stratégies fini avec $Y^{(G)} \subset X^{(G)}$ et $Y^{(D)} \subset X^{(D)}$
q, p	Paramètres de coefficient de la fonction d'énergie LPEP
u_i	Intensité du pixel i dans l'image Γ
I_1	Moyenne des intensités à l'intérieur du fond F
I_0	Moyenne des intensités de la forme B
I_k	Moyenne des intensités des pixels marqués par le marqueur h si $s_h = 1$ et les pixels non marqués par le marqueur h si $s_h = 0, \forall h \in L$
F, B	Marqueurs ou contraintes de fond et de forme, respectivement
ν	Facteur de poids contrôlant la contribution de longueur de la forme de l'objet

A.1 Monotonie des Fonctions d'Énergies Non-Convexes Utilisées

Toutes les fonctions modélisées dans ce chapitre sont croissantes ou décroissantes et cela est bien confirmé par Nikolova dans [35] et aussi par [90, 91, 92] (mentionné et détaillé dans la section 5.2.2), donc elles sont globalement monotones. Et selon l'Equation 4.2.8 ces fonctions sont bien extensibles par monotonie dans une boîte bornée qui est dans notre cas $[0,1]^{n \times l}$. Cette propriété est bien importante puisque les variables seront traitées un par un, en fixant les autres à chaque itération. Cette démarche est équivalente à la recherche du minimum d'une fonction à une seule variable. Puisque Φ est monotone, chaque fonction de coût C_{ih} , correspondante à chaque joueur π_{ih} extraite à partir de cette fonction d'énergie Φ par l'Equation 2.13, est aussi monotone.

Bibliographie

- [1] L. Grady and J. R. Polimeni. *Discrete Calculus - Applied Analysis on Graphs for Computational Science*. Springer, 2010.
- [2] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (Applied Mathematical Sciences)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.
- [3] R. Chellapa and A. Jain. *Markov random fields : theory and application*. Academic Press, 1993.
- [4] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structure and problems. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, ASSP-37 :2024–2036, 1989.
- [5] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, PAMI-6, 1984.
- [6] G. Bertrand. On topological watersheds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2-3) :217–230, 2005.
- [7] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, and M. Couprie. Watershed cuts : Minimum spanning forests and the drop of water principle. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 31(8) :1362–1374, 2009.
- [8] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, and M. Couprie. Watershed cuts : Thinnings, shortest path forest, and topological watersheds. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 32(5) :925–939, 2010.
- [9] L. Najman and M. Schmitt. Watershed of a continuous function. *Signal Processing*, 38(1) :99–112, Juillet 1994.
- [10] J. B. T. M. Roerdink and A. Meijster. The watershed transform : Definitions, algorithms and parallelization strategies. *Fundam. Inf.*, 41(1,2) :187–228, Avril 2000.

-
- [11] L. Vincent and P. Soille. Watersheds in digital spaces : An efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 13(6) :583–598, Juin 1991.
- [12] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1) :48–50, Février 1956.
- [13] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell Systems Technical Journal*, pages 1389–1401, Novembre 1957.
- [14] R. Zabih Y. Boykov, O. Veksler. Markov random fields with efficient approximations. In *IEEE computer society conference on Computer vision and pattern recognition, Santa Barbara, CA, USA*, pages 648–655. IEEE, 25 Juin 1998.
- [15] B. Appleton and H. Talbot. Globally minimal surfaces by continuous maximal flows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(1) :106–118, 2006.
- [16] M. Unger, T. Pock, W. Trobin, D. Cremers, and H. Bischof. Tvseg - interactive total variation based image segmentation. In *In British Machine Vision Conference BMVC, Leeds, UK*, volume 2, 1-4 Septembre 2008.
- [17] L. J. Grady. Random walks for image segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 28(11) :1768–1783, 2006.
- [18] O. Duchenne, J.-Y. Audibert, R. Keriven, J. Ponce, and F. Ségonne. Segmentation by transduction. In *Proceedings of IEEE Conference in Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , Anchorage, Alaska, USA*, pages 24–26, Juin 2008.
- [19] X. Bai and G. Sapiro. A geodesic framework for fast interactive image and video segmentation and matting. In *11th International Conference on Computer Vision ICCV, Rio de Janeiro, Brazil*, pages 1–8, 14-21 Octobre 2007.
- [20] C. V. Alvino, G. B. Unal, G. G. Slabaugh, B. Peny, and T. Fang. Efficient segmentation based on eikonal and diffusion equations. *Int. J. Comput. Math.*, 84(9) :1309–1324, 2007.
- [21] A. Criminisi, T. Sharp, and A. Blake. Geos : Geodesic image segmentation. In *ECCV 8th Proceedings of the 10th European Conference on Coputer Vision : Part I, Marseille, France*, pages 99–112. Springer-Verlag, 12-14 Octobre 2008.
- [22] A. X. Falc ao, J. Stolfi, and R. de Alencar Lotufo. The image foresting transform : Theory, algorithms, and applications. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 26(1) :19–29, Janvier 2004.
-

-
- [23] C. Couprie, L. J. Grady, L. Najman, and H. Talbot. Power watershed : A unifying graph-based optimization framework. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 33(7) :1384–1399, 2011.
- [24] A. K. Sinop and L. Grady. A seeded image segmentation framework unifying graph cuts and random walker which yields a new algorithm. In *In Proceedings of International Conference of Computer Vision ICCV, Rio de Janeiro, Brazil*, pages 1–8, 14-24 Octobre 2007.
- [25] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5) :577–685, 1989.
- [26] T. F. Chan and L. A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277, February 2001.
- [27] K. Ni, B. Hong, S. Soatto, and T. Chan. Unsupervised multiphase segmentation : a recursive approach. *Computer Vision and Image Understanding*, 113(4) :502–510, 2009.
- [28] E. Bae and X. C. Tai. Graph cut optimization for the piecewise constant level set method applied to multiphase image segmentation. In *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision : Second International Conference SSVM Voss, Norway*, pages 1–13, 1-5 Juin 2009.
- [29] N. El Zehiry, S. Xu, P. Sahoo, and A. Elmaghraby. Graph cut optimization for the mumford-shah model. In *The Seventh IASTED International Conference on Visualization, Imaging and Image Processing VIIP, Palma de Mallorca, Spain, VIIP '07*, pages 182–187, 29-31 Août 2007.
- [30] N. Y. El-Zehiry and L. Grady. Combinatorial optimization of the discretised multiphase mumford-shah functional. *International Journal of Computer Vision*, 104(3) :270–285, 2013.
- [31] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, 1988.
- [32] M. Nikolova T. F. Chan, S. Esedoglu. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 66(5) :1632–1648, 2006.
- [33] L. Duval É. Chouzenoux J. C. Pesquet A. Repetti, M. Q. Pham. Euclid in a taxicab : Sparse blind deconvolution with smoothed ℓ_1/ℓ_2 regularization. *IEEE Signal Processing Letters*, 22(5) :539–543, 2015.
-

-
- [34] D.E. McClure S. Geman. Bayesian image analysis : An application to single photon emission tomography. In *Proceedings of the American Statistical Association. Statistical Computing Section*, pages 12–18, 1985.
- [35] M. Nikolova. *Energy Minimization Methods*. Springer New York, New York, 2015.
- [36] O. Morgenstern J. Von Neumann. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [37] J. F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1) :48–49, 1950.
- [38] J. Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54(2) :286–295, 1951.
- [39] J. D. Molina and H. Rudnick. Transmission expansion investment : Cooperative or non-cooperative game? In *Power and Energy Society General Meeting, Providence, RI, USA*, pages 1–7, 25-29 Juillet 2010.
- [40] O. Carbonell-Nicolau and R. P. McLean. Refinements of Nash equilibrium in potential games. *Theoretical Economics*, 9(3) :555–582, September 2014.
- [41] K.C. Border. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [42] A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3) :497–520, 1960.
- [43] J. Nieblig and G. Eichfelder. A branch-and-bound based algorithm for nonconvex multiobjective optimization. *Preprint-Series of the Insitute for Mathematics, Technische Universität Ilmenau, Germany*, pages 1–29, 2018.
- [44] B. Chatterjee. An optimization formulation to compute nash equilibrium in finite games. In *Proceeding of International Conference on Methods and Models in Computer Science ICM2CS, Delhi, India*, pages 1–5, 14-15 Decembre 2009.
- [45] S. Lasaulce and H. Tembine. *Game Theory and Learning for Wireless Networks : Fundamentals and Applications*. MA : Academic Press, Août 2011.
- [46] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [47] D. Monderer and L. S. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14(1) :124–143, 1996.
- [48] B. Schipper. Pseudo-potential games, 2004.

-
- [49] M. Voorneveld. Equilibria and approximate equilibria in infinite potential games. *Economics Letters*, 56(2) :163–169, 1997.
- [50] Pradeep Dubey, Ori Haimanko, and Andriy Zapechelnyuk. Strategic complements and substitutes, and potential games. *Games and Economic Behavior*, 54(1) :77–94, 2006.
- [51] A. Chakraborty and J. S. Duncan. Game-theoretic integration for image segmentation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 21(1) :12–30, Janvier 1999.
- [52] M. Kallel, A. Rajae, A. Habbal, and M. Moakher. A nash-game approach to joint image restoration and segmentation. *Applied Mathematical Modelling*, 38(11–12) :3038 – 3053, 2014.
- [53] J. Li, G. Zeng, R. Gan, H. Zha, and L. Wang. A game-theoretical approach to image segmentation. In *Computational Visual Media - First International Conference, CVM , Beijing, China*, pages 33–42, 8-10 Novembre 2012.
- [54] Y. Boykov and M. P. Jolly. Interactive graph cuts for optimal boundary and region segmentation of objects in n-d images. In *8th International Conference on Computer Vision ICCV, Vancouver, BC, Canada*, pages 105–112, 7-14 Juillet 2001.
- [55] D. Shen, G. Chen, Y. Zheng, E. Blasch, and K. Pham. Game theoretic approach to similarity-based image segmentation. In *Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, California, United States*, volume 8137, pages 1–12, 16 Septembre 2011.
- [56] I. B. Dimock and J. W. L. Wan. Cellular image segmentation using n-agent cooperative game theory, 21 Mars 2016.
- [57] O. Boudraa and K. Benatchba. *Region-Edge Cooperation for Image Segmentation Using Game Theory*. Springer International Publishing, 2015.
- [58] S. Yu and M. Berthod. A game strategy approach for image labeling. *Computer Vision Image Understanding*, 61 :12–30, 1995.
- [59] T. Wang, Q. Sun, Z. Ji, Q. Chen, and P. Fu. Multi-layer graph constraints for interactive image segmentation via game theory. *Pattern Recogn.*, 55(C) :28–44, July 2016.
- [60] I. Gilboa and E. Zemel. Nash and correlated equilibria : Some complexity considerations. *Games and Economic Behavior*, 1 :80–93, 1989.
- [61] D. Fotakis, S. Kontogiannis, E. Koutsoupias, M. Mavronicolas, and P. Spirakis. The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game. *Theoretical Computer Science*, 410(36) :3305–3326, 2009.
-

-
- [62] V. Conitzer and T. Sandholm. New complexity results about nash equilibria. *Games and Economic Behavior*, 63(2) :621–641, 2008.
- [63] E. L. Lawler and D. E. Wood. Branch-and-bound methods : A survey. *Operations Research*, 14(4) :699–719, 1966.
- [64] B. Gendron and T. G. Crainic. Parallel branch-and-branch algorithms : Survey and synthesis. *Operations Research*, 42(6) :1042–1066, 1994.
- [65] J. Nossack and E. Pesch. A branch-and-bound algorithm for the acyclic partitioning problem. *Computers & OR*, 41 :174–184, 2014.
- [66] B. Peng, L. Zhang, and D. Zhang. A survey of graph theoretical approaches to image segmentation. *Pattern Recognition*, 46(3) :1020–1038, 2013.
- [67] E. Altman, Y. Hayel, and H. Kameda. Evolutionary dynamics and potential games in non-cooperative routing. In *5th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks and Workshops WiOpt, Limasso, Cyprus*, pages 1–5, 16-20 Avril 2007.
- [68] P. Arbelaez, C. Fowlkes, and J. Malik. The berkeley segmentation dataset.
- [69] A. A. Taha and A. Hanbury. <https://github.com/Visceral-Project/EvaluateSegmentation>, 2015.
- [70] A. A. Taha and A. Hanbury. Metrics for evaluating 3D medical image segmentation : analysis, selection, and tool. *BMC Medical Imaging*, 15 :29, August 2015.
- [71] L. R. Dice. Measures of the amount of ecologic association between species. *Ecology*, 26(3) :297–302, July 1945.
- [72] P. E. Shrout and J. L. Fleiss. Intraclass correlations : Uses in assessing rater reliability. *Psychological Bulletin*, 86(2) :420–428, 3 1979.
- [73] R. Cárdenes, de R. Luis-García, and M. Bach-Cuadral. A multidimensional segmentation evaluation for medical image data. *Comput. Methods Prog. Biomed.*, 96(2) :108–124, nov 2009.
- [74] A. R. Reddy, E. V. Prasad, and L. S. S. Reddy. Comparative analysis of brain tumor detection using different segmentation techniques. *International Journal of Computer Application*, 82(14) :14–28, 2013.
- [75] A. R. Reddy, E. V. Prasad, and L. S. S. Reddy. Abnormality detection of brain mr image segmentation using iterative conditional mode algorithm. *International Journal of Applied Information Systems (IJ AIS)*, 5(2) :56–66, 2013.
-

-
- [76] N. Vadaparthi, S. Yarramalle, S. V. Penumatsa, and P. S. R. Murthy. Segmentation of brain mr images based on finite skew gaussian mixture model with fuzzy c-means clustering and em algorithm. *International Journal of Computer Application*, 28(10) :18–26, 2011.
- [77] D. R. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics, 7-14 Juillet 2001.
- [78] G. Gerig, M. Jomier, and M. Chakos. Valmet : A new validation tool for assessing and improving 3d object segmentation, 14-17 Octobre 2001.
- [79] H. Wang and H. Zheng. *True Positive Rate*. Springer New York, New York, NY, 2013.
- [80] E. Zhang and Y. Zhang. *F-Measure*. Springer US, Boston, MA, 2009.
- [81] D. P. Huttenlocher, G. A. Klanderman, and W. A. Rucklidge. Comparing images using the hausdorff distance. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 15 :850–863, 1993.
- [82] A. Neumaier, Cambridge University Press, and G.C. Rota. *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge Middle East Library. Cambridge University Press, 1990.
- [83] Ramon E. Moore, R. Baker Kearfott, and Michael J. Cloud. *Introduction to Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2009.
- [84] R. E. Moore and C. T. Yang. Interval analysis i. technical document. Technical report, Lockheed Missiles and Space Division, Sunnyvale, CA, USA, 1959.
- [85] N. Bousquet. Accelerated Monte Carlo estimation of exceedance probabilities under monotonicity constraints. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques.*, 21(3) :557–591, 2012.
- [86] D. R. Jones., C. D. Perttunen, and B. E. Stuckman. Lipschitzian optimization without the lipschitz constant. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 79(1) :157–181, Octobre 1993.
- [87] D. Gabay and H. Moulin. *On the uniqueness and stability of Nash-equilibria in non-cooperative games*, volume 130 of *Contributions to Economic Analysis*, chapter 9, pages 271–293. North Holland Publishing Company, 1980.
- [88] L. A. Vese and T. F. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :271–293, 2002.
-

-
- [89] M. Jeon, M. Alexander, W. Pedrycz, and N. Pizzi. Unsupervised hierarchical image segmentation with level set and additive operator splitting. *Pattern Recognition Letters*, 26(10) :1461–1469, 2005.
- [90] T. N. Sainath B. Ramabhadran P. A. Olsen D. Kanevsky, D. Nahamoo. A-functions : A generalization of extended baum-welch transformations to convex optimization. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Prague, Czech Republic*, pages 5164–5167, 22-27 Mai 2011.
- [91] P. Yin, E. Esser, and J. Xin. Ratio and difference of l1 and l2 norms and sparse representation with coherent dictionaries. 2 :87–109, 01 2014.
- [92] P. Harjulehto, V. Latvala, and O. Toivanen. A variant of the geman–mcclure model for image restoration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 399(2) :676 – 681, 2013.
- [93] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, July 1990.
- [94] M. J. Black, G. Sapiro, D. H. Marimont, and D. Heeger. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :421–432, March 1998.
- [95] C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot. Anisotropic diffusion using power watersheds. In *IEEE International Conference on Image Processing, Hong Kong, China*, pages 4153–4156, 26-29 Septembre 2010.
- [96] Brainweb : Simulated brain database. <http://brainweb.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>.
- [97] A. Kouzana, A. Nakib, and N. Doggaz. Microscopic image segmentation based on based branch and bound and game theory. In *Metaheuristics for Medicine and Biology*, chapter 6, pages 109–120. Springer, Berlin, Heidelberg, 2017.
- [98] A. Kouzana, A. Nakib, N. Doggaz, H. Talbot, and K. Bsaïes. Local divide and conquer based approach for image segmentation. *En correction*.